



UNIVERSITÉ DE GENÈVE

# MÉCANIQUE II

MÉCANIQUE ANALYTIQUE  
RELATIVITÉ RESTREINTE  
MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Prof. Michel Droz

Département de Physique Théorique  
Université de Genève  
CH-1211 Genève 4, Suisse

Cahier rédigé par François Coppex

v1.30 – avril 2005



# Préface

Ce cours s'adresse aux étudiants qui ont déjà suivi un cours d'introduction à la mécanique (Mécanique I par exemple) dans lequel les concepts de base de la mécanique newtonienne ainsi que la cinématique relativiste ont été acquis.

Ce cours se divise en trois grandes parties. La première est consacrée à la mécanique analytique. Les lois de la mécanique newtonienne sont reformulées en terme de principe variationnel conduisant aux équations d'Euler-Lagrange. Le formalisme hamiltonien découle naturellement du formalisme lagrangien.

La seconde traite de la théorie de la relativité restreinte. La cinématique relativiste est brièvement revue, puis la dynamique relativiste avec ses aspects lagrangien et hamiltonien est décrite.

Enfin la troisième partie traite de la mécanique classique des corps continus et déformables. Les notions vues dans la première partie pour des systèmes de particules rigides sont étendues au cas du milieu continu. Les bases de la théorie de l'élasticité sont exposées et un chapitre est dédié à la mécanique des fluides.

Tout au long de ce cours nous avons essayé de mettre en évidence les concepts et les idées générales qui gouvernent les sujets abordés en insistant sur leurs liens avec d'autres chapitres de la physique que l'étudiant abordera plus tard. Néanmoins, beaucoup de soins a aussi été apporté aux détails des calculs. Finalement, de nombreux compléments mathématiques concernant les méthodes et techniques de calcul utilisées figurent dans un dernier chapitre, rendant la lecture de ces notes auto-suffisante.

Certains paragraphes sont marqués d'un astérisque. Ils concernent des sujets plus avancés, donnés en complément d'information.

Je tiens à remercier les Dr. F. Coppex, S. Richard, I. Bena, et E. Bertin, assistants du cours, pour leurs précieuses remarques et suggestions concernant tant le cours que les exercices associés.

Finalement, mes remerciements vont au Dr. F. Coppex pour le travail considérable effectué, avec enthousiasme et compétence, pour rédiger ces notes de cours.

Prof. Michel Droz



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Généralités . . . . .	1
1.2	Coordonnées généralisées et contraintes . . . . .	1
1.2.1	Contraintes holonômes . . . . .	2
1.2.2	Contraintes scléronômes et rhéonômes . . . . .	2
1.2.3	Contraintes non holonômes . . . . .	3
1.2.4	Contraintes unilatérales, bilatérales et semi-holonômes . . . . .	4
1.2.5	Coordonnées généralisées indépendantes . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Le formalisme lagrangien</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction . . . . .	9
2.2	Le principe de Hamilton (ou principe de “moindre action”) . . . . .	9
2.3	Détermination du lagrangien . . . . .	11
2.3.1	Le principe des travaux virtuels . . . . .	11
2.3.2	Le principe de d’Alembert . . . . .	15
2.3.3	Equations de Lagrange de première espèce . . . . .	16
2.3.4	Potentiels généralisés . . . . .	18
2.3.4.1	Forces de Lorentz . . . . .	19
2.3.5	Moments conjugués . . . . .	19
2.3.6	Illustrations du formalisme lagrangien . . . . .	20
2.3.6.1	Pendule harmonique . . . . .	20
2.3.6.2	Le problème de Stokes . . . . .	21
2.4	Le principe de Hamilton pour des liaisons non holonômes . . . . .	22
2.4.1	Equations de Lagrange de seconde espèce . . . . .	23
2.4.2	Liaisons holonômes comme cas particulier . . . . .	24
2.5	Propriétés des systèmes lagrangiens . . . . .	26
2.5.1	Changement de coordonnées . . . . .	26
2.5.2	Non-unicité du lagrangien . . . . .	28
2.5.3	Lois de conservation . . . . .	29
2.5.3.1	Variables cycliques . . . . .	29
2.5.3.2	Homogénéité du temps . . . . .	30
2.5.3.3	Symétries et lois de conservation : le théorème de Noether . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Le formalisme hamiltonien</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Hamiltonien et transformée de Legendre du lagrangien . . . . .	37
3.2.1	Les équations canoniques de Hamilton . . . . .	38
3.2.2	Evolution hamiltonienne et crochets de Poisson . . . . .	39
3.2.3	Renversement du temps . . . . .	42
3.3	Théorèmes de Liouville et de Poincaré . . . . .	43

3.3.1	L'espace des phases . . . . .	43
3.3.2	Le théorème de Liouville . . . . .	43
3.3.3	Le théorème de Poincaré . . . . .	48
3.4	Les transformations canoniques . . . . .	53
3.4.1	Généralités . . . . .	53
3.4.2	Critères de canonicité . . . . .	54
3.4.2.1	La structure symplectique des équations canoniques . . .	54
3.4.2.2	Jacobien . . . . .	55
3.4.2.3	Différentielle totale . . . . .	56
3.4.2.4	Crochets de Lagrange . . . . .	58
3.4.2.5	Exemples de transformations canoniques . . . . .	59
3.4.3	Les fonctions génératrices . . . . .	61
3.4.3.1	Fonction génératrice de première espèce . . . . .	62
3.4.3.2	Fonction génératrice de seconde espèce . . . . .	63
3.4.3.3	Fonction génératrice de troisième espèce . . . . .	64
3.4.3.4	Fonction génératrice de quatrième espèce . . . . .	64
3.4.3.5	Récapitulatif . . . . .	65
3.4.3.6	Exemples . . . . .	65
3.5	Systèmes intégrables et non-intégrables . . . . .	68
3.6	La théorie de Hamilton-Jacobi . . . . .	69
3.6.1	Le cas dépendant du temps . . . . .	69
3.6.2	Le cas indépendant du temps . . . . .	71
3.6.2.1	L'exemple de l'oscillateur harmonique . . . . .	72
3.6.3	Le cas séparable . . . . .	73
3.6.3.1	L'exemple du potentiel central dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	76
3.6.4	Limite classique de la description d'une particule quantique . . . .	78
3.6.5	Les variables angle-action . . . . .	79
3.6.5.1	Système à un degré de liberté . . . . .	79
3.6.5.2	Système à plusieurs degrés de liberté . . . . .	82
3.6.5.3	Application à l'atome de Bohr . . . . .	83
3.6.5.4	Le théorème de Liouville-Arnold* . . . . .	84
3.7	Le problème à trois corps . . . . .	85
3.7.1	Généralités . . . . .	85
3.7.2	Le problème à trois corps restreint . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Théorie de la relativité restreinte</b> . . . . .	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.2	Limites de validité de la mécanique newtonienne . . . . .	97
4.3	Les postulats de la relativité restreinte . . . . .	98
4.4	La transformation de Lorentz . . . . .	98
4.4.1	Distance entre deux événements . . . . .	98
4.4.2	Transformation et groupe de Lorentz . . . . .	100
4.4.3	Les quadrivecteurs . . . . .	104
4.4.4	Les quadrivecteurs en cinématique relativiste . . . . .	105
4.5	Cinématique : les conséquences physiques . . . . .	106
4.5.1	Perte de simultanéité . . . . .	106
4.5.2	Dilatation du temps . . . . .	107
4.5.3	Contraction des longueurs . . . . .	107
4.6	Dynamique relativiste . . . . .	108
4.6.1	Energie et impulsion . . . . .	108
4.6.2	La force relativiste . . . . .	109
4.7	L'approche lagrangienne* . . . . .	111

4.8	L'approche hamiltonienne*	112
<b>5</b>	<b>Mécanique des milieux continus et déformables</b>	<b>115</b>
5.1	Introduction	115
5.2	Un modèle de chaîne élastique	115
5.3	Formulation lagrangienne pour les systèmes continus	118
5.4	Généralités sur les corps élastiques	119
5.5	Théorie de l'élasticité linéaire isotrope	121
5.5.1	Efforts internes et tenseur des tensions	121
5.5.2	Conditions d'équilibre	123
5.5.2.1	Forces	123
5.5.2.2	Moments	124
5.5.3	Le tenseur des déformations	126
5.5.4	Propriétés du tenseur des déformations	129
5.5.5	Relation linéaire entre contraintes et déformations	130
5.5.6	L'exemple de l'élongation d'un barreau	134
5.6	Généralités sur les corps visqueux	135
5.7	Théorie de la viscosité linéaire isotrope	136
5.7.1	Le tenseur des vitesses de déformation	136
5.7.2	Propriétés du tenseur des vitesses de déformation	137
5.7.3	Relation linéaire entre contraintes et vitesses de déformation	137
5.8	Equation de la visco-élasticité isotrope linéaire	137
5.8.1	Ondes élastiques dans un milieu homogène isotrope	138
<b>6</b>	<b>Mécanique des fluides</b>	<b>143</b>
6.1	Introduction	143
6.2	Equations de bilan	143
6.2.1	Descriptions de Lagrange et de Euler	143
6.2.1.1	Description de Lagrange	144
6.2.1.2	Description de Euler	144
6.2.2	Dérivée matérielle ou substantielle	144
6.2.3	Forme générale de l'équation de bilan	145
6.2.4	Le bilan de masse	147
6.2.5	Le bilan de quantité de mouvement	148
6.2.5.1	Le fluide visqueux : l'équation de Navier-Stokes	148
6.2.5.2	Le fluide parfait : l'équation de Euler	153
6.2.5.3	Le fluide parfait stationnaire incompressible : l'équation de Bernoulli	153
6.3	Lois de similitude et nombre de Reynolds	155
6.4	Les tourbillons	158
6.4.1	Définitions	158
6.4.2	Le théorème de Kelvin	159
6.5	Etude de différents écoulements	162
6.5.1	Écoulement de fluides visqueux : l'écoulement de Poiseuille	162
6.5.2	Écoulements de fluides parfaits	164
6.5.2.1	Les écoulements potentiels	164
6.5.2.2	Le fluide parfait autour d'obstacles	165
6.5.2.3	Equation du potentiel	166
6.5.2.4	Ondes de gravitation	167
<b>A</b>	<b>Compléments</b>	<b>173</b>
A.1	Formes différentielles et facteurs intégrants	173

A.2	Calcul variationnel . . . . .	174
A.2.1	Equations de Euler pour une variable . . . . .	174
A.2.2	Equations de Euler pour plusieurs variables . . . . .	177
A.3	Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	177
A.3.1	Problème variationnel sous contraintes . . . . .	180
A.4	Fonction homogène de degré $p$ . . . . .	181
A.5	Transformation de Legendre . . . . .	181
A.5.1	Cas particulier d'une variable . . . . .	181
A.5.2	Cas général . . . . .	183
A.6	Principe variationnel et formalisme hamiltonien . . . . .	184
A.7	Crochets de Poisson et algèbre de Lie . . . . .	185
A.8	Calcul tensoriel . . . . .	187
A.9	Formulation covariante relativiste* . . . . .	189
A.9.1	Système à une particule . . . . .	189
A.9.2	Système de plusieurs particules . . . . .	192
A.10	Dérivation numérique et différences centrées . . . . .	192
A.11	Théorème de Helmholtz . . . . .	193
A.12	Champs tensoriels, opérateurs différentiels . . . . .	195
A.13	Opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes . . . . .	196
A.13.1	Démarche générale . . . . .	197
A.13.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	198
A.13.2.1	Divergence . . . . .	198
A.13.2.2	Gradient . . . . .	198
A.13.2.3	Rotationnel . . . . .	198
A.13.2.4	Laplacien d'une fonction scalaire . . . . .	199
A.13.2.5	Laplacien d'un vecteur . . . . .	199
A.13.2.6	Composantes de $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ . . . . .	199
A.13.2.7	Divergence d'un tenseur . . . . .	199
A.13.3	Coordonnées sphériques . . . . .	200
A.13.3.1	Divergence . . . . .	200
A.13.3.2	Gradient . . . . .	200
A.13.3.3	Rotationnel . . . . .	200
A.13.3.4	Laplacien d'une fonction scalaire . . . . .	200
A.13.3.5	Laplacien d'un vecteur . . . . .	200
A.13.3.6	Composantes de $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ . . . . .	201
A.13.3.7	Divergence d'un tenseur . . . . .	201
A.13.4	Equation de continuité . . . . .	201
A.13.4.1	Coordonnées cylindriques . . . . .	201
A.13.4.2	Coordonnées sphériques . . . . .	201
A.13.5	Equation de Navier-Stokes . . . . .	202
A.13.5.1	Coordonnées cylindriques . . . . .	202
A.13.5.2	Coordonnées sphériques . . . . .	203
	<b>Références</b> . . . . .	<b>205</b>
	<b>Index</b> . . . . .	<b>211</b>
	<b>Table des Figures</b> . . . . .	<b>212</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Généralités

La première partie de ce cours (les trois premiers chapitres) est consacrée à la *mécanique analytique* des systèmes classiques. Cette approche consiste à reformuler les lois de la mécanique newtonienne de manière plus abstraite en terme de principe variationnel. Ce type d'approche n'est pas restreint à la mécanique mais est souvent utilisé dans divers domaines de la physique comme par exemple en thermodynamique, mécanique statistique, mécanique quantique, électrodynamique et théorie des champs.

Dans le cadre de la mécanique classique, cette approche a plusieurs avantages :

- Ce formalisme est indépendant du système de coordonnées choisi. En effet, la mécanique analytique se base sur des grandeurs dites *scalaires*, qui par définition sont invariantes par changement de repère. Ainsi, il est possible de choisir les coordonnées judicieusement de façon à simplifier la résolution des problèmes.
- Ce formalisme permet d'exploiter de façon naturelle les symétries des systèmes considérés (théorème de Noether).
- Ce formalisme est mieux adapté au traitement des forces de liaison et des contraintes.

Dans ce premier chapitre, on considère la question du choix des coordonnées utilisées pour décrire un système mécanique. Pour cela, nous étudierons les diverses contraintes possibles et introduirons la notion de coordonnées généralisées.

### 1.2 Coordonnées généralisées et contraintes

Pour décrire la position de  $N$  points matériels dans l'espace à 3 dimensions, il suffit de donner les  $3N$  coordonnées cartésiennes de ces points. Mais toutes ces coordonnées ne sont pas toujours nécessaires pour décrire le système. D'une part il peut y avoir des contraintes sur le système, réduisant ainsi le nombre de coordonnées indépendantes. D'autre part, les propriétés de symétrie du système sont telles que les coordonnées cartésiennes ne sont pas toujours appropriées. Il est donc en général suffisant de donner un ensemble de  $n \leq 3N$  grandeurs, notées  $(q_1, \dots, q_n)$ , pour définir la position des  $N$  points. Les  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont appelées les *coordonnées généralisées*. Le nombre de coordonnées généralisées indépendantes est appelé le nombre de *degrés de liberté* du système.

Le rôle des contraintes est important. Considérons un système formé de  $N$  particules de masses  $m_i$  et de positions  $\mathbf{x}_i$ . La dynamique du système est alors donnée par l'équation

de Newton :

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \varphi_{ji}, \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  est la force extérieure agissant sur la particule  $i$  et  $\varphi_{ji}$  la force interne exercée sur la particule  $i$  par la particule  $j$ . Notons que  $\varphi_{ii} = 0$  et  $\varphi_{ij} + \varphi_{ji} = 0$  (principe d'action-réaction). Ainsi, a priori, la résolution du problème (les forces étant supposées connues) se ramène à l'intégration de  $3N$  équations différentielles du second ordre pour des conditions initiales données. Néanmoins, cette démarche néglige les *contraintes* entre particules  $\mathbf{x}_i$ . Par exemple, dans un solide la distance entre deux particules (ou points) peut être fixe  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = \text{cte}$ , etc. Il convient donc de classifier les différentes contraintes possibles.

### 1.2.1 Contraintes holonômes

**Définition 1.1** *Le système est soumis à une **contrainte holonôme** si les coordonnées  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , vérifient une équation de liaison de la forme*

$$f(x_1, \dots, x_N, t) = 0, \quad (1.2)$$

Le système peut être soumis simultanément à  $C \leq N$  contraintes holonômes de la forme

$$f_\mu(x_1, \dots, x_N, t) = 0, \quad \mu = 1, \dots, C \leq N. \quad (1.3)$$

**Définition 1.2** *Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , alors une **contrainte différentielle** est une relation de la forme*

$$\sum_{i=1}^N a_i(\mathbf{x}, t) dx_i + b(\mathbf{x}, t) dt = 0, \quad (1.4)$$

où  $a_i(\mathbf{x})$  et  $b(\mathbf{x}, t)$  sont des fonctions définissant la contrainte.

**Définition 1.3** *Une contrainte différentielle est dite **intégrable** s'il existe une fonction  $f(\mathbf{x}, t)$  telle que  $a_i(\mathbf{x}, t) = \partial f(\mathbf{x}, t) / \partial x_i \forall i = 1, \dots, N$  et  $b(\mathbf{x}, t) = \partial f(\mathbf{x}, t) / \partial t$  (cf. annexe A.1).*

De ces définitions on conclut qu'il y a équivalence entre les concepts de contrainte holonôme et de contrainte différentielle intégrable.

### 1.2.2 Contraintes scléronômes et rhéonômes

Les contraintes peuvent dépendre explicitement du temps ou non. Aussi on introduit les définitions suivantes :

**Définition 1.4** *Si la contrainte  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , alors  $f$  est dite **contrainte scléronôme**.*

**Définition 1.5** *Si la contrainte  $f$  dépend explicitement du temps  $t$ , alors  $f$  est dite **contrainte rhéonôme**.*

**Exemples:** les systèmes suivants sont soumis à des contraintes holonômes :

- Corps rigide : soient  $\mathbf{x}_i$ ,  $i \geq 1$ , des points sur un corps rigide, alors la distance relative entre deux points sur le corps définit une contrainte holonôme scléronôme :  $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| - c_{ij} = 0$ , où  $c_{ij}$  est la distance constante entre ces deux points.
- Pendule : soit un pendule rigide de longueur  $L$  avec une masse  $m$  en  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , alors la contrainte  $f(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} - L = 0$  est holonôme scléronôme (cf. Fig. 1.1).

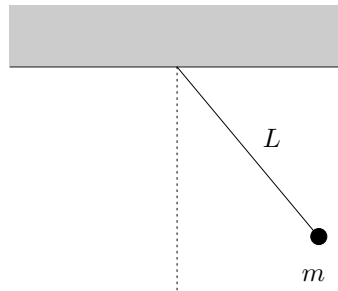


FIG. 1.1 – Pendule simple définissant une contrainte holonôme scléronôme.

- Ressort excité : soit un ressort dont une extrémité est fixée  $x_A = 0$  et l'autre  $x_B(t)$  subit une oscillation d'amplitude  $\varepsilon$  et de pulsation  $\omega$ , alors  $f(x_B, t) = x_B(t) - \varepsilon \cos(\omega t) = 0$  définit une contrainte holonôme rhéonôme (cf. Fig. 1.2).

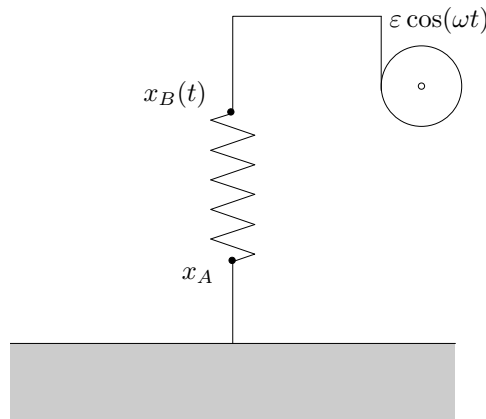


FIG. 1.2 – Ressort excité définissant une contrainte holonôme rhéonôme.

◇

### 1.2.3 Contraintes non holonômes

**Définition 1.6** Une contrainte est dite **non holonôme** si elle est définie par une contrainte différentielle non intégrable. Ainsi, une contrainte qui ne peut pas s'écrire sous la forme (1.2) est non holonôme.

**Exemples:** en général, toute contrainte s'exprimant sous la forme d'une inégalité ou qui dépend des vitesses est non holonôme. Les systèmes suivants sont soumis à des contraintes non holonômes :

- Des particules de position  $\mathbf{x}_i$  confinées dans une boîte de dimensions  $(2L)^3 : |\mathbf{x}_i| < L$ .
- Roue verticale roulant sans glisser sur un plan (cf. Fig. 1.5).

◇

### 1.2.4 Contraintes unilatérales, bilatérales et semi-holonômes

Il peut être utile de distinguer les contraintes suivantes :

**Définition 1.7** Une contrainte est dite **bilatérale** si elle s'exprime sous la forme d'une égalité :

$$f_\mu(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, t) = 0. \quad (1.5)$$

Une contrainte bilatérale peut donc définir une contrainte holonôme ou non holonôme. On constate que la définition 1.1 de la contrainte holonôme ne fait pas intervenir les vitesses. Or une contrainte bilatérale dépendant des vitesses peut être holonôme. En effet, dans ce cas il est possible de se ramener à une contrainte différentielle intégrable (cf. exemple du roulement sans glissement en dimension une, page 6).

**Définition 1.8** Une contrainte non holonôme est dite **unilatérale** si elle s'exprime sous la forme d'une inégalité :

$$f_\mu(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, t) \geq 0. \quad (1.6)$$

**Exemple:** skieur sur un tremplin (cf. Fig. 1.3).

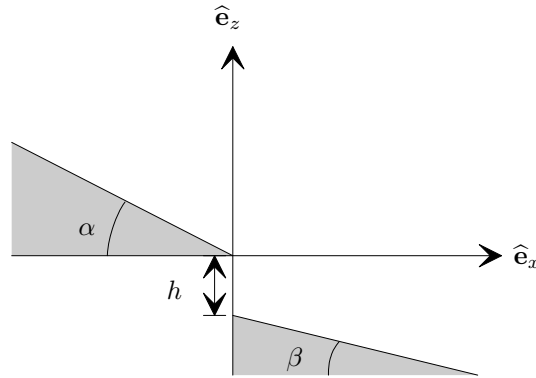


FIG. 1.3 – Contrainte unilatérale.

Soit  $(x, z)$  la position du skieur, alors la contrainte de la géométrie s'écrit

$$z = x \operatorname{tg} \alpha, \quad x < 0, \quad (1.7a)$$

$$z \geq -h - x \operatorname{tg} \beta, \quad x \geq 0. \quad (1.7b)$$

La contrainte (1.7) est unilatérale. ◇

**Définition 1.9** Une contrainte non holonôme  $f_\mu$  est dite **semi-holonôme** si elle est de la forme

$$f_\mu(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) = 0. \quad (1.8)$$

Une contrainte semi-holonôme est donc une contrainte bilatérale scléronôme, ou *auto-nôme* (qui ne dépend pas explicitement du temps) non intégrable.

Les contraintes semi-holonômes vont jouer un rôle important lors de la dérivation des *équations de Lagrange de deuxième espèce*. Un exemple de telles contraintes est donné dans le cas d'une roue se déplaçant sans glisser sur un plan (cf. Fig. 1.5 et Eqs. (1.15)).

### 1.2.5 Coordonnées généralisées indépendantes

La présence de contraintes conduit à certaines difficultés techniques. En effet les coordonnées  $x_i$  ne sont a priori pas indépendantes, et les forces de contraintes a priori pas non plus connues.

La manière d'obtenir un système de coordonnées indépendantes est illustrée par l'exemple qui suit. Soit un système décrit par  $N$  coordonnées, notées  $x_1, \dots, x_N$ . Il s'agit par exemple d'un système de  $N/3 \in \mathbb{N}$  particules ponctuelles dans  $\mathbb{R}^3$ . S'il existe  $C \leq N$  contraintes holonômes  $f_\mu(x_1, \dots, x_N, t) = 0$ ,  $\mu = 1, \dots, C$ , alors on peut décrire le système avec  $l = N - C$  *coordonnées généralisées indépendantes*, ou *degrés de liberté*,  $q_1, \dots, q_l$ , telles que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, \dots, q_l, t) \\ &\vdots \\ x_N &= x_N(q_1, \dots, q_l, t) \\ f_1(x_1, \dots, x_N, t) &= 0 \\ &\vdots \\ f_C(x_1, \dots, x_N, t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

La transformation est supposée inversible. Le système est alors dit *holonôme à  $l$  degrés de liberté*.

Si les contraintes sont non holonômes, alors elles ne peuvent pas être utilisées pour passer à un système de coordonnées généralisées indépendantes. Pour traiter un problème non holonôme, il faudra recourir à la méthode des multiplicateurs de Lagrange, comme nous le verrons plus loin au paragraphe 2.4.1.

Une autre difficulté due aux contraintes est que les forces de contraintes ne sont pas nécessairement connues. Un formalisme qui ne fait pas appel explicitement à ces forces est donc souhaitable.

#### Remarques:

- Soit un système à  $l$  degrés de libertés, alors si le système est holonôme il existe  $C$  fonctions  $f_\mu$  telles que  $f_\mu(x_1, \dots, x_N, t) = 0 \forall \mu = 1, \dots, C$ , avec  $l = N - C$ . Les formes différentielles

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\mu}{\partial t} dt = 0, \quad \mu = 1, \dots, C \tag{1.10}$$

sont intégrables.

- Pour toute contrainte non holonôme, la forme différentielle de la contrainte

$$\sum_{i=1}^N A_i dx_i + A_0 dt = 0 \tag{1.11}$$

est non intégrable.

◇

On renvoie à l'annexe A.1 pour un rappel sur les formes différentielles.

**Exemple:** on illustre l'intégrabilité des contraintes avec le système fait d'un disque roulant sans glissement sur une surface rugueuse.

- 1D : soit  $x$  la position du centre du disque,  $r$  son rayon et  $\varphi$  l'angle que fait un point  $P$  situé sur son périmètre par rapport avec l'axe vertical (cf. Fig. 1.4).

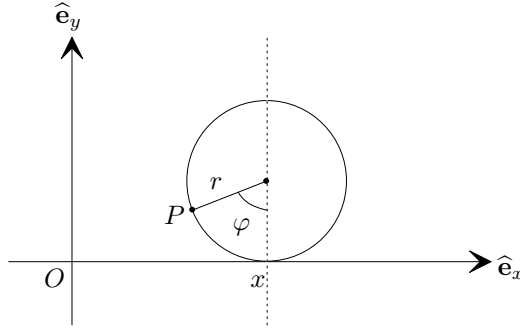


FIG. 1.4 – Roulement sans glissement en dimension 1.

Les coordonnées généralisées sont  $x$  et  $\varphi$ . La condition de non glissement fournit la relation

$$\dot{x} = r\dot{\varphi}, \quad (1.12)$$

dont la forme différentielle est

$$dx = r d\varphi. \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) est une forme différentielle intégrable, car par intégration on obtient

$$x - x_0 = r(\varphi - \varphi_0), \quad (1.14)$$

où  $x_0 = x(t_0)$  et  $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ . L'équation (1.12) est ainsi intégrable. Le problème est donc holonôme à 1 degré de liberté.

- 2D : soit à présent le même système en dimension 2. Soit  $\Delta$  la direction de déplacement de la roue,  $r$  son rayon,  $\theta$  l'angle entre l'axe  $\Delta$  et  $\hat{e}_x$ ,  $\mathbf{v}$  la vitesse instantanée du point de contact entre la roue et le plan  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ ,  $x$  et  $y$  les composantes de la position du centre de la roue dans les directions  $\hat{e}_x$  et  $\hat{e}_y$  (cf. Fig. 1.5).

Le module de la vitesse  $\mathbf{v}$  est  $v = r|\dot{\varphi}|$ , ce qui donne après projection sur le repère cartésien :

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \cos \theta \quad (1.15a)$$

$$\dot{y} = -r\dot{\varphi} \sin \theta. \quad (1.15b)$$

Les différentielles des contraintes (1.15) sont

$$dx + r \cos \theta d\varphi = 0 \quad (1.16a)$$

$$dy + r \sin \theta d\varphi = 0. \quad (1.16b)$$

Le système de contraintes (1.16) n'est pas intégrable. Cela signifie qu'il n'existe pas de fonction  $f(x, y, \theta, \varphi)$  qui transforme les équations (1.16) en une différentielle totale. En effet, par addition

$$dx + dy + r(\cos \theta + \sin \theta)d\varphi = 0, \quad (1.17)$$

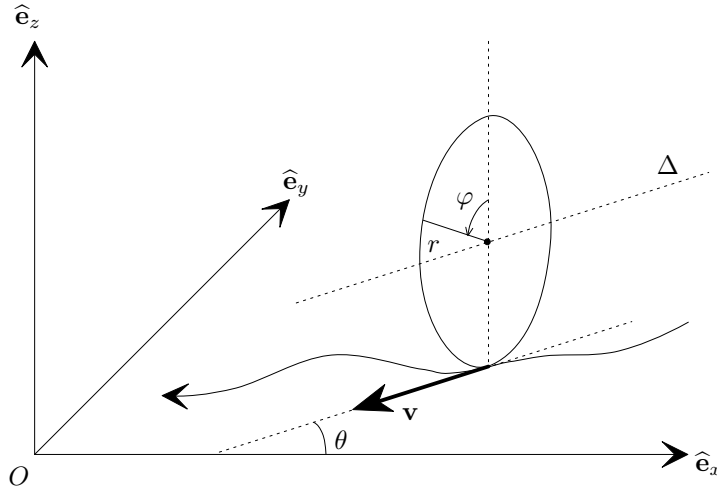


FIG. 1.5 – Roulement sans glissement en dimension 2.

et il est clair qu'il n'existe pas de fonction  $u(x, y, \theta, \varphi)$  telle que (voir l'annexe A.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi = 0 = du(x, y, \theta, \varphi), \quad (1.18)$$

avec

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r(\cos \theta + \sin \theta). \quad (1.19)$$

Donc  $\partial^2 u / \partial \theta \partial \varphi \neq \partial^2 u / \partial \varphi \partial \theta$ , par conséquent il n'existe pas de fonction  $u$  satisfaisant l'Eq. (1.18) (voir l'annexe A.1). Une autre manière de comprendre la non-intégrabilité de ces contraintes est de constater qu'il n'y a pas de relation univoque entre  $\varphi$  et  $\{x, y, \theta\}$ . Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'en tout point de sa trajectoire le disque peut tourner sur un cercle de rayon  $R$  arbitraire dans le plan  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ . Après un tour,  $x$ ,  $y$ , et  $\theta$  retrouvent leur valeur initiale alors que  $\varphi$  aura changé d'une quantité arbitraire dépendante de  $R$ . Il n'y a donc pas de relation univoque entre ces variables.

◇





## Chapitre 2

# Le formalisme lagrangien

### 2.1 Introduction

Ce chapitre débute par une formulation des équations de Newton en terme de principe variationnel. On considère toutes les trajectoires virtuelles allant d'un point initial  $q^{(1)}$  au temps  $t_1$  à un point final  $q^{(2)}$  au temps  $t_2$ . A chaque trajectoire virtuelle sera associée une action, définie comme une intégrale sur la trajectoire d'une fonction appelée le lagrangien. Le principe de Hamilton dit que la trajectoire réelle du système est celle qui extrémalise l'action. Ce principe impose que la trajectoire réelle doit obéir à des conditions particulières, appelées équations d'Euler-Lagrange. Une fois le lagrangien connu, ces équations déterminent la dynamique du système. Partant du principe de d'Alembert, la forme du lagrangien sera établie. Les propriétés des systèmes lagrangiens seront alors étudiées de manière générale. En particulier, les relations fondamentales entre symétries du système et existence de lois de conservation seront établies (théorème de Noether).

### 2.2 Le principe de Hamilton (ou principe de “moindre action”)

Considérons un système mécanique décrit par les coordonnées généralisées indépendantes  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$  et se trouvant au temps  $t_1$  à la position (généralisée)  $q(t_1) = q^{(1)}$  alors qu'en  $t_2$  il se trouve en  $q(t_2) = q^{(2)}$  ( $q$  peut être multidimensionnel). On considère l'ensemble de toutes les trajectoires possibles  $\gamma(t)$  telles que  $\gamma(t_1) = q^{(1)}$  et  $\gamma(t_2) = q^{(2)}$ . Cet ensemble est appelé l'ensemble des *trajectoires virtuelles* (cf. Fig. 2.1).

On cherche à caractériser la trajectoire réelle du système autrement que par les équations de Newton. Pour ceci, définissons l'*action*  $S[\gamma]$  par la fonctionnelle

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L \left( \gamma(t), \frac{d}{dt} \gamma(t), t \right), \quad (2.1)$$

où  $L(\gamma, \dot{\gamma}, t)$  est appelée *fonction lagrangienne* ou *lagrangien du système*.

**Principe de Hamilton :** le mouvement réel effectué par le système est celui qui rend l'action extrémale (extremum absolu).  $\diamond$

**Remarques:**

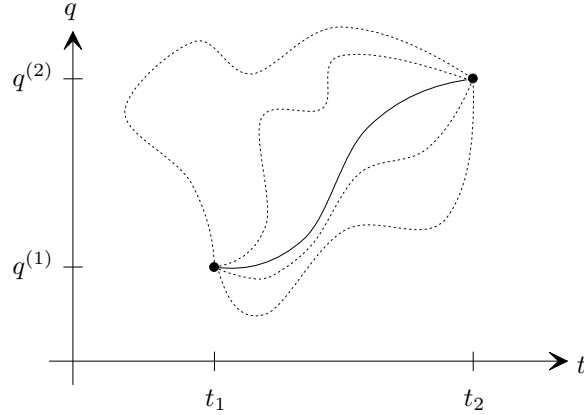


FIG. 2.1 – Trajectoires réelle et virtuelles.

La trajectoire en trait continu schématise le mouvement réel du système, tandis que les trajectoires en traitillés sont des éléments de l'ensemble des trajectoires virtuelles.

- Le principe de Hamilton est aussi parfois appelé *principe de moindre action*. Cette dernière terminologie est néanmoins trompeuse : en effet le mouvement réel est celui qui extrémalise l'action, et par conséquent il ne s'agit pas forcément d'un minimum de l'action.
- L'action  $S[\gamma]$  peut ne pas avoir d'extremums.

Tout système mécanique peut-il être caractérisé par une action  $S[\gamma]$  ? Si oui, quelle est l'expression du lagrangien  $L$  ? Nous reviendrons plus loin sur ces questions.  $\diamond$

Regardons dans un premier temps quelles sont les conséquences du principe de Hamilton. La condition de stationnarité signifie que si  $q(t)$  est la *trajectoire réelle* et que nous paramétrisons l'ensemble des chemins par  $\gamma(t) = q(t) + \lambda\eta(t)$ , alors

$$\frac{d}{d\lambda} S[q(t) + \lambda\eta(t)]_{\lambda=0} = 0. \quad (2.2)$$

$\lambda\eta(t)$  décrit la déviation du mouvement virtuel par rapport au mouvement réel, où  $\lambda$  est un paramètre réel continu. On a donc la condition  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ . Le calcul variationnel (voir l'annexe A.2) fournit les relations auxquelles doit satisfaire le lagrangien pour que l'action soit extrémale. Contentons-nous ici d'en énoncer le résultat principal.

**Théorème 2.1** Soient  $y_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  des fonctions dérivables, indépendantes, et telles que  $y_i(x)$  soit bornée en  $x = x_1$  et  $x = x_2 \forall i$ . Soit  $y'_i(x) = dy_i(x)/dx$ . Soit la fonctionnelle  $I[y_1, \dots, y_N]$  dérivable en chacune de ses variables et définie par

$$I[y_1, \dots, y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx F[y_1(x), \dots, y_N(x); y'_1(x), \dots, y'_N(x); x], \quad (2.3)$$

alors la condition nécessaire pour que  $I$  soit stationnaire est que  $F$  satisfasse les équations de Euler :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

Ainsi, en identifiant les variables  $\{x, y_i, y'_i\}$  du théorème 2.1 avec nos grandeurs  $\{t, q_i, \dot{q}_i\}$ , on obtient les *équations de Euler-Lagrange* (ou simplement *équations de Lagrange*) : soit

$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ , alors

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N.} \quad (2.5)$$

Donc, une condition *nécessaire* pour que le mouvement  $q(t)$  satisfasse le principe de Hamilton est qu'il soit solution des équations de Euler-Lagrange. Cette condition est-elle suffisante? C'est une question plus délicate discutée dans la référence [1].

Les motivations historiques qui ont conduit à l'énoncé de ce principe sont d'ordre philosophique et religieux [2, 3]. Cependant, l'expression de lois physiques en termes de principe variationnel s'est avéré être une approche très utile dans divers domaines de la physique [4, 5, 6, 7].

Comme nous le verrons dans la section suivante, il existe une autre démarche aboutissant aux équations de Lagrange (2.5).

## 2.3 Détermination du lagrangien

Dans la section précédente, nous avons établi l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire le mouvement afin de rendre l'action extrémale. Néanmoins, nous n'avons pas encore déterminé la forme du lagrangien  $L$ . Le but de cette section est donc de trouver l'expression explicite de  $L$ . De plus, nous verrons que dans le cas de forces non conservatives, les équations de Lagrange prennent une forme légèrement différente. Le point de départ doit être, sous une forme ou une autre, les équations de Newton. Nous allons procéder comme suit :

- Reformulation des conditions d'équilibre pour aboutir au principe des travaux virtuels.
- Reformulation des équations du mouvement en utilisant le principe des travaux virtuels pour aboutir au principe de d'Alembert.
- Reformulation du principe de d'Alembert pour aboutir aux équations de Lagrange de première espèce et à une définition pour le lagrangien  $L$ .

### 2.3.1 Le principe des travaux virtuels

**Définition 2.1** *Soit un système décrit par  $N$  coordonnées a priori non indépendantes  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$ , soient  $C$  contraintes holonômes, soient  $l = N - C$  coordonnées généralisées indépendantes  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$ , alors on appelle **déplacement virtuel compatible avec les liaisons** tout déplacement  $\delta \mathbf{r}$  que l'on pourrait imposer au système en tenant compte des liaisons telles qu'elles existent à l'instant  $t$ , c'est-à-dire*

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Donnons quelques explications à propos de cette définition. Le déplacement virtuel compatible avec les liaisons est différent du déplacement réel du système. En effet, les contraintes étant holonômes nous pouvons inverser les  $l$  relations  $q_i = q_i(r_1, \dots, r_N, t)$  pour exprimer les  $N$  relations  $r_i = r_i(q_1, \dots, q_l, t)$ . Le déplacement réel dépend du temps, donc dans ce cas  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \dots, q_l, t)$  et le mouvement infinitésimal réel  $dr_i$  est donné par

$$dr_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} dt. \quad (2.7)$$

Le déplacement virtuel compatible avec les liaisons est un déplacement à *temps fixé* en tenant compte des liaisons, donc le terme contenant la dérivée temporelle de (2.7) sera nul et on retrouve bien l'expression (2.6). On voit bien qu'en général  $\delta r_i \neq dr_i$ . Ainsi, pour résumer, on dit que le déplacement est *virtuel* car on fait varier les coordonnées à temps fixe et donc il ne s'agit pas de la trajectoire réelle du système. On dit aussi que le déplacement est *compatible avec les liaisons* car les contraintes sont holonomes et donc nous pouvons écrire  $r_i = r_i(q_1, \dots, q_l, t)$  ce qui signifie que les contraintes sont implicitement incluses dans la paramétrisation des coordonnées  $r_i$ . Ainsi toute variation des  $r_i$  respectera les liaisons définies par les contraintes holonomes.

**Exemples:**

- Bille se déplaçant sans frottement en dimension 1. Dans ce cas les déplacements réels  $dr$  et virtuels  $\delta r$  sont colinéaires (cf. Fig. 2.2).

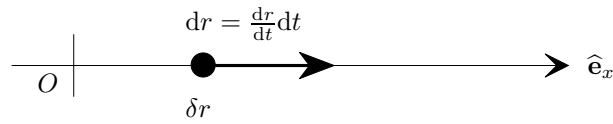


FIG. 2.2 – Déplacements virtuels : point sur la droite.

- Déplacement sur un cercle (cf. Fig. 2.3).

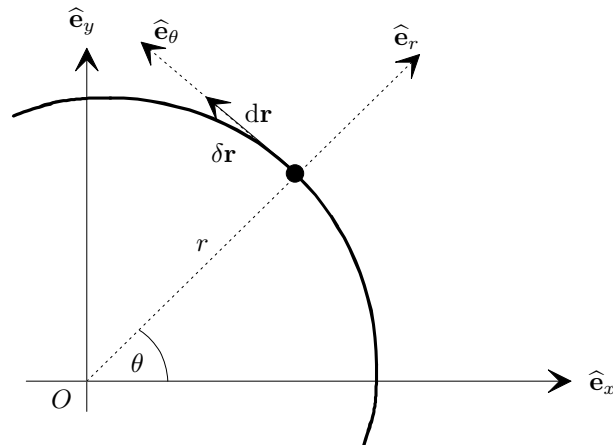


FIG. 2.3 – Déplacements virtuels : point sur un cercle.

Le rayon  $r$  de la trajectoire étant constant on a :

$$\delta \mathbf{r} = \delta \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (2.8)$$

et

$$d\mathbf{r} = \dot{\theta} dt \hat{\mathbf{e}}_\theta. \quad (2.9)$$

Ainsi  $\delta \mathbf{r}$  et  $d\mathbf{r}$  sont colinéaires et il existe donc un mouvement virtuel à chaque temps fixé tel que  $\delta \mathbf{r} = d\mathbf{r}$ .

- Déplacement d'un point dans le plan. Dans ce cas, on constate facilement qu'en général  $\delta \mathbf{r} \neq d\mathbf{r}$ , mais que néanmoins il existe toujours un mouvement virtuel à chaque temps fixé tel que  $\delta \mathbf{r} = d\mathbf{r}$ . (cf. Fig. 2.4).

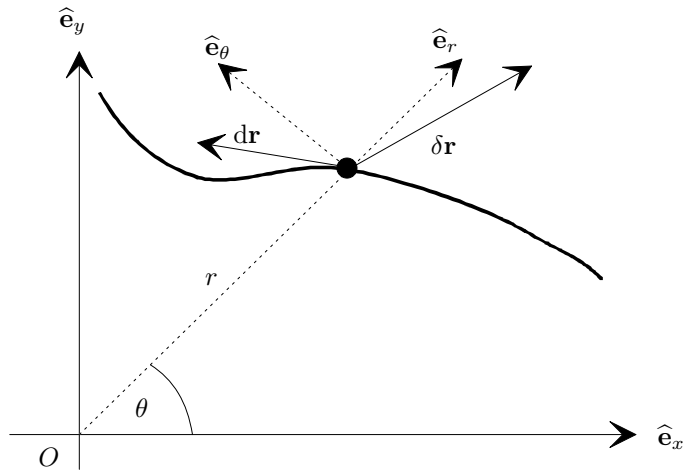


FIG. 2.4 – Déplacements virtuels : point dans le plan.

Le déplacement réel

$$d\mathbf{r} = \dot{r} dt \hat{\mathbf{e}}_r + \dot{\theta} dt \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (2.10)$$

est tangent à la trajectoire, tandis que le déplacement virtuel

$$\delta\mathbf{r} = \delta r \hat{\mathbf{e}}_r + \delta\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (2.11)$$

ne l'est pas en général.

- Centrifugeuse. Soit une particule dans une fiole en rotation (centrifugeuse). Le mouvement virtuel compatible avec les liaisons  $\delta\mathbf{r}$  ne peut se faire que dans une dimension (la direction définie par l'axe de symétrie de la fiole), tandis que le mouvement réel  $d\mathbf{r}$  ajoute deux degrés de liberté supplémentaires (cf. Fig. 2.5). Contrairement aux autres exemples, il n'existe en général pas de mouvement virtuel compatible qui soit pour tout temps fixé égal au mouvement réel infinitésimal.

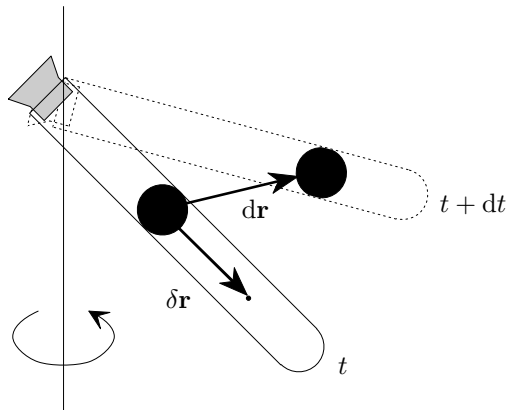


FIG. 2.5 – Déplacements virtuels : centrifugeuse.

◇

On voit des équations (2.6) et (2.7) que si les liaisons sont holonômes scléronômes, alors tout déplacement infinitésimal réel est un déplacement virtuel compatible.

**Définition 2.2** Soit un système soumis à des contraintes. On considère alors ce système sans contraintes, et on appelle **forces de liaison** les forces que l'on devrait appliquer pour remplacer l'effet des contraintes. Ces forces de liaison s'adaptent à tout instant pour que les conditions imposées au système soient satisfaites.

De cette manière, on est amené à décomposer la résultante des forces  $\mathbf{F}$  en deux contributions que l'on note

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(c)}. \quad (2.12)$$

$\mathbf{F}^{(e)}$  représente la résultante des forces extérieures appliquées, et  $\mathbf{F}^{(c)}$  la résultante des forces dues aux contraintes : les forces de liaison.

Soit un système à l'équilibre sous l'action des forces appliquées  $F_i^{(e)}$  et des forces de liaison  $F_i^{(c)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . On a donc

$$F_i^{(e)} + F_i^{(c)} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

et par conséquent

$$\sum_{i=1}^N \left( F_i^{(e)} + F_i^{(c)} \right) \delta r_i = 0, \quad (2.14)$$

pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons  $\delta \mathbf{r}$ .

**Définition 2.3** Soit  $F_i^{(c)}$  la résultante des forces de liaison correspondant à la coordonnée  $i$ , alors on dit que les liaisons  $F_i^{(c)}$  sont **parfaites** si la somme des travaux effectués par les forces de liaison est nulle

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(c)} \delta r_i = 0 \quad (2.15)$$

pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons  $\delta \mathbf{r}$ .

Dans la suite du cours, on se restreint au cas des liaisons parfaites. Cette hypothèse n'est pas très restrictive. Par exemple :

- Les liaisons sont parfaites dans le cas de corps rigides.
- Les liaisons sont parfaites dans tous les cas où une particule se déplace sans frottement sur une surface. En effet, dans ce cas la résultante des forces de contrainte sera perpendiculaire à la surface alors que le mouvement virtuel compatible est tangent à la surface.
- Les liaisons sont parfaites dans le cas de forces de friction avec roulement. En effet, la force de friction agit alors en un point qui est immobile et ne peut par conséquent pas fournir de travail lors d'un déplacement infinitésimal virtuel compatible avec les liaisons.
- Les liaisons ne sont pas parfaites dans le cas de forces de friction avec glissement.

En présence de frottements, on considère la liaison parfaite qui réalise la contrainte et on introduit les frottements dans les forces appliquées.

**Principe des travaux virtuels :** soit un système à l'équilibre soumis à des liaisons parfaites, alors on déduit de (2.14) et (2.15) le principe des travaux virtuels : la somme des travaux des forces appliquées sur un système en équilibre est nulle pour tout déplacement virtuel compatible, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(e)} \delta r_i = 0. \quad (2.16)$$

Remarquons qu'en général  $F_i^{(e)} \neq 0$  puisque les déplacements virtuels  $\delta r_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ne sont pas indépendants mais reliés par des contraintes. Si le système est holonôme à  $l$  degrés de liberté, alors comme  $\delta r_i = \delta r_i(q_1, \dots, q_l, t)$  le principe des travaux virtuels fournit

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(e)} \delta r_i = \sum_{i=1}^N F_i^{(e)} \left( \sum_{j=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^l Q_j \delta q_j = 0, \quad (2.17)$$

où on a défini les *forces généralisées*  $Q_j$  par

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i^{(e)} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}. \quad (2.18)$$

Les  $\delta q_j$  étant alors indépendants, (2.17) implique  $Q_j = 0 \forall j = 1, \dots, l$ . On a ainsi un système de  $l$  équations pour les  $l$  variables  $q_j$ , qui une fois résolu donne la position d'équilibre du système. Notons aussi que comme  $q_j$  n'a pas forcément la dimension d'une longueur, les forces généralisées  $Q_j$  n'ont pas forcément la dimension d'une force.

On peut montrer dans des cas particuliers que la condition des travaux virtuels exprime la condition que les forces de liaison satisfont le principe d'action-réaction [8].

### 2.3.2 Le principe de d'Alembert

Le principe des travaux virtuels est une condition caractérisant la *statique*. Nous voulons établir un résultat concernant la *dynamique*. Pour ceci, considérons maintenant l'analogie de (2.13) dans le cas de la dynamique :

$$F_i^{(e)} + F_i^{(c)} = \dot{p}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.19)$$

où  $p_i$  est l'impulsion. Par conséquent

$$\sum_{i=1}^N \left( F_i^{(e)} + F_i^{(c)} - \dot{p}_i \right) \delta r_i = 0, \quad (2.20)$$

pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons  $\delta \mathbf{r}$ . Le *principe de d'Alembert* consiste à affirmer que le principe des travaux virtuels reste valable pour la dynamique définie par (2.20) (c'est-à-dire que les liaisons restent parfaites pour la dynamique). Il s'agit par conséquent d'une généralisation des travaux virtuels.

**Equation de d'Alembert :** soit un système soumis à des liaisons parfaites, alors pour tout déplacement virtuel compatible  $\delta \mathbf{r}$  et en admettant le principe de d'Alembert on déduit de (2.15) et (2.20) l'équation de d'Alembert :

$$\sum_{i=1}^N \left( F_i^{(e)} - \dot{p}_i \right) \delta r_i = 0. \quad (2.21)$$

En passant aux coordonnées généralisées indépendantes, l'équation de d'Alembert va nous permettre d'établir la forme du lagrangien ainsi que les équations de Lagrange de première espèce.

### 2.3.3 Equations de Lagrange de première espèce

Soient  $N$  coordonnées a priori dépendantes  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$ , soient  $C$  contraintes holonomes définissant ainsi  $l = N - C$  coordonnées généralisées *indépendantes*  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$ , alors  $r_i = r_i(q_1, \dots, q_l, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Définissons les *vitesse généralisées* par

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad (2.22)$$

alors

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Le déplacement virtuel à temps fixe est défini par

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.24)$$

Supposant les liaisons parfaites, nous pouvons sans ambiguïtés dorénavant noter  $F_i^{(e)} = F_i \forall i$ . L'équation de d'Alembert (2.21) s'écrit

$$\sum_{i=1}^N F_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N \dot{p}_i \delta r_i. \quad (2.25)$$

Formulons cette égalité à l'aide des coordonnées généralisées  $q_1, \dots, q_l$ . Le membre de gauche de (2.25) donne :

$$\sum_{i=1}^N F_i \delta r_i \stackrel{(2.24)}{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^l F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \stackrel{(2.18)}{=} \sum_{j=1}^l Q_j \delta q_j, \quad (2.26)$$

où on a utilisé la définition (2.18) de la force généralisée  $Q_j$ .

En utilisant  $\dot{p}_i = m_i \ddot{r}_i$  (ce qui est toujours vrai pour des coordonnées cartésiennes), le membre de droite de (2.25) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{p}_i \delta r_i &\stackrel{(2.24)}{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^l m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^l \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}}_{= \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial q_j}} \right] \delta q_j. \end{aligned} \quad (2.27)$$

D'autre part :

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{(2.23)}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{k=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta_{jk} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}. \quad (2.28)$$



Insérant (2.28) dans (2.27) avec  $\dot{r}_i = v_i$  on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \dot{p}_i \delta r_i &\stackrel{(2.27)}{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^l \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i v_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&\stackrel{(2.28)}{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^l \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^l \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^l \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j, \tag{2.29}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'expression de l'énergie cinétique en coordonnées cartésiennes

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2. \tag{2.30}$$

Remplaçant les membres de gauche (2.26) ainsi que de droite (2.29) dans l'équation de d'Alembert (2.25) on obtient

$$\sum_{j=1}^l \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^l Q_j \delta q_j. \tag{2.31}$$

Or les liaisons étant supposées holonômes, les  $\delta q_j$  sont indépendants et par conséquent la relation (2.31) est vraie pour tout  $\delta \mathbf{q}$ , ce qui fournit

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad \forall i = 1, \dots, l.} \tag{2.32}$$

L'ensemble des  $l$  équations (2.32) est parfois appelé *équations de Lagrange de première espèce*. Notons que  $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , et rappelons que les forces généralisées  $Q_i$  sont données par la relation (2.18).

Revenons à l'expression (2.18) des forces généralisées. Supposons que les forces externes  $F_i$  soient égales à la somme de forces *conservatives*  $-\partial V(\mathbf{r}, t)/\partial r_i$  et de forces *non conservatives*  $\tilde{F}_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  (ou bien de façon plus générale,  $\tilde{F}_i$  contient toutes les forces qui ne dérivent pas d'un potentiel de la forme  $V(\mathbf{r}, t)$ , cf. Sect. 2.3.4) :

$$F_i = -\frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \tilde{F}_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \tag{2.33}$$

Insérant (2.33) dans l'expression des forces généralisées (2.18) nous obtenons

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \stackrel{(2.33)}{=} -\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \tilde{F}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}}_{\doteq \tilde{Q}_j} = -\frac{\partial V(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} + \tilde{Q}_j. \tag{2.34}$$

Insérant (2.34) dans (2.32) on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= -\frac{\partial V(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} + \tilde{Q}_i \\
\implies \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} &= \tilde{Q}_i. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

En définissant le lagrangien  $L$  par

$$\boxed{L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)}, \quad (2.36)$$

alors on voit que les équations (2.35) prennent la forme

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \dots, l}, \quad (2.37)$$

avec

$$\tilde{Q}_i = \sum_{j=1}^N \tilde{F}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \quad (2.38)$$

les forces généralisées ne découlant pas d'un potentiel de la forme  $V(\mathbf{q}, t)$ .

En résumé : dans cette section, en partant du principe de d'Alembert nous avons dérivé les équations de Lagrange dans le cas général où le système admet des forces non conservatives. Pour des *systèmes conservatifs* où ces forces sont nulles, nous retrouvons les équations (2.5) obtenues par le principe de Hamilton. Ceci montre *l'équivalence des principes de d'Alembert et de Hamilton pour les systèmes conservatifs holonômes*. Notons que cette dérivation est tout-à-fait générale et ne fait appel à aucune autre hypothèse que le principe de d'Alembert. Nous avons de plus établi quelle était l'expression du lagrangien. Ainsi, les relations (2.36) et (2.37) fournissent  $l$  équations différentielles du second ordre pour les  $l$  inconnues  $q_i(t)$ .

### 2.3.4 Potentiels généralisés

Regardons le cas particulier des équations de Lagrange (2.37) (ou bien de (2.32)) lorsque les forces dérivent d'un *potentiel généralisé*.

**Définition 2.4** Une fonction  $u(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  est un **potentiel généralisé** si elle satisfait aux équations de Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial u(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial u(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.39)$$

Si de plus la force s'exprime comme  $F_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = -\partial u(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) / \partial r_i$ , alors de l'Eq. (2.34) on a

$$\begin{aligned} Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \sum_{j=1}^N F_j(\mathbf{r}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{q}}), t) \frac{\partial r_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} \\ &= - \sum_{j=1}^N \frac{\partial u(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} \\ &= - \frac{\partial u(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i} \\ &= F_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Supposons ainsi que les forces  $F_i$  dérivent d'un tel potentiel, alors des équations de Lagrange de première espèce (2.32) on voit que le lagrangien défini par

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - u(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.41)$$

satisfait aux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.42)$$

La force de Lorentz est un exemple particulièrement important.

### 2.3.4.1 Forces de Lorentz

Soit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , soit une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  en présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et d'un champ d'induction  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ . Ces champs sont définis en termes des potentiels scalaire  $\phi(\mathbf{x}, t)$  et vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  comme suit [9] :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, t) - \partial_t\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (2.43)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (2.44)$$

La *force de Lorentz* est alors donnée par

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ . Dans ce cas le potentiel généralisé est

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = q\phi(\mathbf{x}, t) - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}. \quad (2.46)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial u}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &\stackrel{(2.46)}{=} \frac{d}{dt} (-qA_i) - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\ &= \underbrace{-q \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + q \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j}_{= q(\dot{\mathbf{x}} \times \nabla \times \mathbf{A})_i \stackrel{(2.44)}{=} q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})} - \underbrace{q \frac{\partial A_i}{\partial t} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}_{\stackrel{(2.43)}{=} qE_i} \\ &\stackrel{(2.45)}{=} F_i. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Le lagrangien est alors donné par

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.48)$$

### 2.3.5 Moments conjugués

**Définition 2.5** Soit  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  le lagrangien du système, alors le **moment conjugué**  $p_i$  à la variable  $q_i$  est défini par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.49)$$

Cette définition reste valable dans le cas où le potentiel est généralisé. On dit aussi parfois que  $p_i$  est *l'impulsion généralisée*. En effet, si par exemple le système considéré est un ensemble de  $N$  particules ponctuelles de masse  $m_i$  avec un potentiel  $V = V(\mathbf{q}, t)$ , alors

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i \dot{q}_i^2 - V(\mathbf{q}, t). \quad (2.50)$$

Ainsi

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i, \quad (2.51)$$

ce qui est l'impulsion de la particule  $i$  (ou bien d'une de ses composantes si la dimension de l'espace est supérieure à 1).

## 2.3.6 Illustrations du formalisme lagrangien

### 2.3.6.1 Pendule harmonique

Soit un pendule formé d'un ressort harmonique de constante de rappel  $k$  et d'une masse  $m$  en son extrémité. Le système est soumis à la gravitation, et on impose un mouvement plan. Soit  $l$  la longueur au repos du ressort avec la masse, et  $r(t)$  son élongation. Soit  $\theta$  l'angle entre le pendule et la verticale (cf. Fig. 2.6).

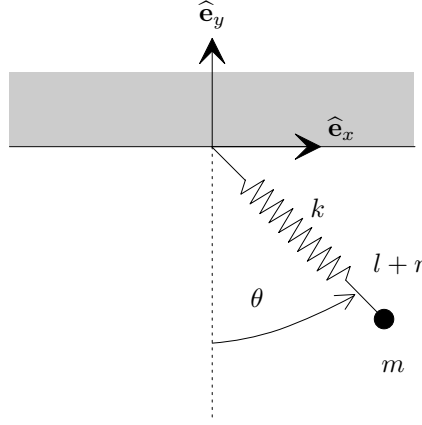


FIG. 2.6 – Pendule harmonique.

Le problème peut être décrit à l'aide des deux coordonnées généralisées indépendantes  $q_1 = r(t)$  et  $q_2 = \theta(t)$ . Les forces étant celles de gravitation et de rappel du ressort, le système est conservatif et  $\tilde{Q}_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . La position de la masse dans le repère cartésien est donnée par

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (l+r) \sin \theta \\ -(l+r) \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

donc

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} (l+r)\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \sin \theta \\ (l+r)\dot{\theta} \sin \theta - \dot{r} \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

et

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \stackrel{(2.53)}{=} \frac{1}{2} m \left[ \dot{r}^2 + (l+r)^2 \dot{\theta}^2 \right]. \quad (2.54)$$

L'énergie potentielle est

$$V = -mg(l+r) \cos \theta - \frac{1}{2} kr^2. \quad (2.55)$$

Le lagrangien du système est donc

$$L = T - V. \quad (2.56)$$

Les équations de Euler-Lagrange donnent :

$$q_1 = r : \quad m\ddot{r} \underbrace{-m(l+r)\dot{\theta}^2}_{\text{accélération centripète}} = \underbrace{mg \cos \theta + kr}_{\text{forces}} \quad (2.57a)$$

$$q_2 = \theta : \quad \underbrace{m(l+r)^2\ddot{\theta} + 2m(l+r)\dot{r}\dot{\theta}}_{\substack{= \frac{d}{dt}[m(l+r)^2\dot{\theta}] \\ \text{dérivée temporelle du moment angulaire}}} = \underbrace{-mg(l+r)\sin \theta}_{\text{moment des forces}}. \quad (2.57b)$$

On en déduit que l'équation (2.57a) est l'équation de Newton radiale, tandis que (2.57b) est l'équation du moment cinétique. On retrouve bien les équations de Newton.

### 2.3.6.2 Le problème de Stokes

Supposons qu'une partie des forces seulement ne dérive pas d'un potentiel. C'est par exemple le cas s'il y a des forces de frottement. Un cas fréquent est celui où la force de frottement est proportionnelle à la vitesse :

$$\tilde{F}_i = -k_i v_i^\gamma, \quad i = 1, \dots, l, \quad (2.58)$$

où  $k_i > 0$  est un coefficient de proportionnalité positif,  $v_i$  une composante de la vitesse cartésienne, et  $\gamma$  un exposant positif définissant le régime de frottement. En général  $\gamma = \gamma(v)$  ; néanmoins, dans le régime des faibles vitesses l'expérience montre que  $\gamma = 1$ . Supposons avoir un système de  $l/3 \in \mathbb{N}$  particules ponctuelles en dimension 3,  $\mathbf{v}_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$ . Définissons la *fonction de dissipation de Rayleigh*  $R$  par

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l/3} (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2). \quad (2.59)$$

Pour traiter le problème de Stokes, utilisons la forme générale (2.37) des équations de Lagrange. Notant  $\alpha$  l'indice sur les composantes  $\{x, y, z\}$ , on a donc

$$\tilde{F}_{i\alpha} \stackrel{(2.58)}{=} -\frac{\partial R}{\partial v_{i\alpha}}. \quad (2.60)$$

Notant  $\tilde{\mathbf{F}}_j = (\tilde{F}_{jx}, \tilde{F}_{jy}, \tilde{F}_{jz})$ ,  $\mathbf{r}_j = (r_{jx}, r_{jy}, r_{jz})$ , les forces généralisées (2.38) deviennent

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i &= \sum_{j=1}^{l/3} \tilde{\mathbf{F}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \\ &\stackrel{(2.60)}{=} - \sum_{j=1}^{l/3} \nabla_{\mathbf{v}_j} R \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \\ &\stackrel{(2.28)}{=} - \sum_{j=1}^{l/3} \nabla_{\mathbf{v}_j} R \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \dot{q}_i} \\ &= -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Ainsi les équations de Euler-Lagrange (2.37) deviennent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l/3. \quad (2.62)$$

Remarquons tout de même qu'il n'est pas forcément nécessaire de recourir à la fonction de dissipation de Rayleigh pour traiter ce problème. En effet, utilisant la forme (2.58) des forces de frottement dans les équations de Lagrange (2.37) on obtient directement le résultat cherché.

Regardons à présent le cas particulier du *problème de Stokes*. Soit une bille de rayon  $a$  se déplaçant sous l'influence de la gravitation à vitesse  $\mathbf{v}$  dans un liquide isotrope et homogène de viscosité  $\eta$  (cf. Fig. 2.7), alors la bille subit la force de frottement

$$\mathbf{F} = -6\pi a\eta\mathbf{v}. \quad (2.63)$$

On dit parfois de (2.63) qu'il s'agit de la *formule de Stokes*.

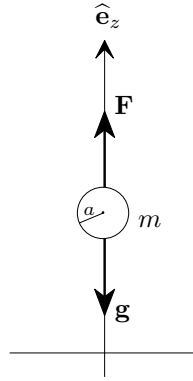


FIG. 2.7 – Problème de Stokes.

Étudions la dynamique de la masse à l'aide des équations de Lagrange. Soit  $m = (\rho_m - \rho_l)V$  la masse effective de la bille due au principe d'Archimède, où  $\rho_m$  est la masse volumique de la bille,  $\rho_l$  celle du liquide, et  $V$  le volume de la bille. Le lagrangien est alors

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz. \quad (2.64)$$

L'isotropie impose  $k_x = k_y = k_z = k$ , et par la formule de Stokes  $k = 6\pi a\eta > 0$ . L'équation de Lagrange (2.62) donne alors le résultat connu

$$m\ddot{z} + k\dot{z} = mg. \quad (2.65)$$

Choisissons la condition initiale telle que la bille est initialement au repos, c'est-à-dire  $\dot{z}(0) = 0$ . Notant  $v(t) = \dot{z}(t)$ , la solution de (2.65) est

$$v(t) = v_\infty [1 - \exp(-t/\tau)], \quad (2.66)$$

avec

$$v_\infty = \frac{mg}{6\pi a\eta}, \quad \tau = \frac{v_\infty}{g}. \quad (2.67)$$

L'existence de frottement implique donc une limite finie  $v_\infty$  pour la vitesse si  $t \rightarrow \infty$ .  $\tau$  est un ordre de grandeur du temps de relaxation vers la vitesse asymptotique  $v_\infty$ .

## 2.4 Le principe de Hamilton pour des liaisons non holonômes

Dans le cas de liaisons non holonômes, on ne peut plus intégrer les formes différentielles et passer du système de  $N$  coordonnées dépendantes  $x_i$  aux  $l$  coordonnées généralisées

indépendantes  $q_i$ . Ainsi, il n'est pas possible de procéder comme lors de l'établissement des équations de Lagrange de première espèce (passage de l'Eq. (2.31) à l'Eq. (2.32)) car les déplacements virtuels  $\delta q_i$  ne seraient plus indépendants si les liaisons sont non holonômes. Un traitement du cas non holonôme peut être obtenu si les liaisons sont semi-holonômes. La méthode pour traiter ce problème fait appel aux *multiplicateurs de Lagrange* (cf. annexe A.3).

### 2.4.1 Equations de Lagrange de seconde espèce

Soient  $C$  contraintes semi-holonômes

$$f_\mu(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = 0, \quad \forall \mu = 1, \dots, C, \quad (2.68)$$

exprimées en fonction des  $N$  coordonnées généralisées dépendantes. Pratiquement, ces contraintes se présentent comme formes différentielles non intégrables

$$\sum_{i=1}^N (a_{\mu i} dq_i + b_{\mu i} d\dot{q}_i) = 0, \quad \forall \mu = 1, \dots, C. \quad (2.69)$$

Appliquons les méthodes des multiplicateurs de Lagrange et du problème variationnel sous contraintes discutées dans l'annexe A.3. Notons  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ . Si (2.68) est vérifié, alors la condition suivante est encore vraie

$$\sum_{\mu=1}^C \lambda_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad (2.70)$$

où  $\lambda_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sont  $C$  fonctions inconnues appelées *multiplicateurs de Lagrange*. Le principe de Hamilton impliquait que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0. \quad (2.71)$$

En combinant les Eqs. (2.70) et (2.71) on obtient

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{\mu=1}^C \Lambda_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] = 0, \quad (2.72)$$

où

$$\lambda_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \Lambda_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2.73)$$

Comme discuté dans l'annexe A.3.1, résoudre (2.72) revient à extrémiser l'action sous les contraintes  $f_\mu = 0$ , ce qui est bien ce que nous cherchons à faire. Ainsi, les conditions de Euler-Lagrange peuvent être appliquées pour

$$\bar{L} = L + \sum_{\mu=1}^C \Lambda_\mu f_\mu. \quad (2.74)$$

Ce calcul donne :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\mu=1}^C \Lambda_\mu f_\mu \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{\mu=1}^C \Lambda_\mu f_\mu \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \underbrace{\sum_{\mu=1}^C f_\mu}_{(2.68)_0} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial q_i} \right) \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^C \left[ \Lambda_\mu \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i} \right) + \underbrace{\frac{df_\mu}{dt}}_{(2.69)_0} \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d\Lambda_\mu}{dt} \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{q}_i} \right] \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^C \left[ \Lambda_\mu \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i} \right) + \frac{d\Lambda_\mu}{dt} \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{q}_i} \right] \quad (2.75)
\end{aligned}$$

Il en découle les *équations de Lagrange de seconde espèce* :

$$\boxed{
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \phi_i, & i = 1, \dots, N, \\
\phi_i &= \sum_{\mu=1}^C \left[ \Lambda_\mu \left( \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d\Lambda_\mu}{dt} \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{q}_i} \right], & (2.76) \\
f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, & \mu = 1, \dots, C,
\end{aligned}
}$$

où  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  et  $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . (2.76) définit un système de  $N + C$  équations différentielles aux dérivées partielles pour les  $N + C$  inconnues  $\{q_1, \dots, q_N, \Lambda_1, \dots, \Lambda_C\}$ .

La dynamique est celle d'un système holonôme à  $N$  degrés de liberté soumis aux forces généralisées  $\phi_i$ .

## 2.4.2 Liaisons holonômes comme cas particulier

Les équations de Lagrange de seconde espèce (2.76) peuvent évidemment être particularisées au cas des liaisons holonômes. Dans ce cas  $f_\mu = f_\mu(q_1, \dots, q_N)$  et donc

$$\phi_i = \sum_{\mu=1}^C \Lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.77)$$

Les équations (2.76) donnent alors la dynamique des  $N$  coordonnées généralisées et les  $\phi_i$  apparaissent comme les forces de contrainte. Les équations de Lagrange de seconde espèce sont donc utiles dans le cas de liaisons holonômes lorsque :

- Il n'est pas "pratique" de réduire le nombre de coordonnées de  $N$  à  $N - C$ .
- Si on désire avoir accès aux *forces de liaison* du système, qui sont alors données par les  $\phi_i$ . Ceci peut par exemple s'avérer très important pour la construction d'appareils pour lesquels on doit connaître les forces internes pour choisir les matériaux adéquats.

**Exemple:** pendule simple oscillant dans le plan (cf. Fig. 2.8).

Pour comparaison, on désire établir les équations du mouvement du système à l'aide des équations de Lagrange de première et de deuxième espèces. On a deux coordonnées généralisées  $\{r, \theta\}$  avec une contrainte holonôme scléronôme  $f(r) = r - l = 0$ . Le problème est donc holonôme à 1 degré de liberté  $\theta$ .



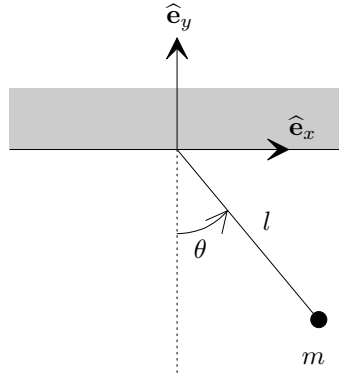


FIG. 2.8 – Pendule simple et force de liaison.

1. Equations de Lagrange de première espèce. L'utilisation de la contrainte permet de se ramener à un problème à 1 degré de liberté,  $\theta$ . Ainsi

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - V = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr \cos \theta. \quad (2.78)$$

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.79)$$

fournit l'équation du mouvement

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (2.80)$$

2. Equations de Lagrange de seconde espèce.  $r$  et  $\theta$  sont deux coordonnées généralisées soumises à la contrainte  $f(r) = r - l = 0$ . Le lagrangien est alors

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2 + mgl \cos \theta. \quad (2.81)$$

Les forces généralisées (2.77) sont

$$\phi_r = \Lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \Lambda, \quad \phi_\theta = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0. \quad (2.82)$$

Les équations de Lagrange de seconde espèce du système sont donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \Lambda, \quad (2.83a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (2.83b)$$

ce qui donne

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = \Lambda, \quad (2.84a)$$

$$m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) + mgr \sin \theta = 0. \quad (2.84b)$$

Incluant la contrainte  $r = l$  dans (2.84a) on obtient

$$\Lambda = -mg \cos \theta - ml\dot{\theta}^2, \quad (2.85)$$

ce qui n'est autre que l'égalité entre la tension due à la masse  $m$  et la somme des forces centripètes et de gravitation. L'équation (2.84b) et la contrainte  $r = l$  fournissent

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0, \quad (2.86)$$

qui est la relation (2.80).

◇

Notons qu'il peut exister des contraintes non holonomes qui ne s'expriment pas comme formes différentielles non intégrables (par exemple celles qui prennent la forme d'inégalités). Dans ces cas (peu fréquents en pratique), une approche lagrangienne n'est pas possible.

## 2.5 Propriétés des systèmes lagrangiens

Cette section montre dans quel sens la formulation lagrangienne est particulièrement bien adaptée à l'étude de certaines propriétés des systèmes mécaniques (changements de coordonnées, symétries, etc.). La résolution des équations de Lagrange peut être difficile. Cependant, sans obtenir une résolution complète, l'approche lagrangienne permet d'établir des indications importantes sur la dynamique (intégrales premières, constantes du mouvement). Les résultats de cette section concernent des systèmes conservatifs (c'est-à-dire pour lesquels  $\tilde{Q}_i = 0$ ) et holonomes.

### 2.5.1 Changement de coordonnées

**Question :** comment les équations de Lagrange se modifient-elles sous un changement de coordonnées ?

**Proposition 2.1** *Les équations de Lagrange sont invariantes sous une transformation des coordonnées qui est un difféomorphisme.*

**Preuve:** Soient  $l$  coordonnées généralisées  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$ , soit le lagrangien  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  vérifiant les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.87)$$

Soit  $\Psi$  un *difféomorphisme* (application bijective différentiable dont l'inverse est aussi différentiable) tel que  $\Psi(q_1, \dots, q_l, t) = (Q_1, \dots, Q_l, t)$ , c'est-à-dire  $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_l, t) \forall i = 1, \dots, l$ . Soit

$$\bar{L} = \bar{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_l), \quad (2.88)$$

le lagrangien  $L$  dans les nouvelles variables  $\mathbf{Q}$ . On désire donc montrer :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.89)$$

Remarquons d'abord que  $\Psi$  étant un difféomorphisme, nous pouvons l'inverser pour obtenir

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_l, t), \quad \forall i = 1, \dots, l. \quad (2.90)$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} \stackrel{(2.88)}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i} L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}. \quad (2.91)$$

Or :

$$\dot{q}_j \stackrel{(2.90)}{=} \frac{d}{dt} q_j(Q_1, \dots, Q_l, t) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{dQ_k}{dt} + \frac{\partial q_j}{\partial t}, \quad (2.92)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \stackrel{(2.92)}{=} \sum_{k=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \underbrace{\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i}}_{=\delta_{ki}} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}. \quad (2.93)$$

(2.93) dans (2.91) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} &= \sum_{j=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} &= \sum_{j=1}^l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^l \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Or on remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial Q_i} q_j(Q_1, \dots, Q_l, t) \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_k \partial Q_i} \frac{dQ_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial Q_i} \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{dQ_k}{dt} + \frac{\partial q_j}{\partial t} \right]}_{\stackrel{(2.92)}{=} \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

(2.95) dans (2.94) donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} &= \sum_{j=1}^l \left[ \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{\stackrel{(2.87)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right] \\ &= \sum_{j=1}^l \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right), \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(Q_1, \dots, Q_l, t) \\ &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

■

Remarquons que ce résultat reflète un des grands avantages du formalisme lagrangien par rapport à la méthode des équations de Newton. En effet, l'invariance des équations de Lagrange sous un difféomorphisme permet de choisir le système de coordonnées qui rend les calculs plus aisés.

### 2.5.2 Non-unicité du lagrangien

**Proposition 2.2** Soit  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$ , soient les lagrangiens  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  et

$$\tilde{L}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad (2.97)$$

$$\tilde{L}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt}f(\mathbf{q}, t), \quad (2.98)$$

où  $f(\mathbf{q}, t)$  est une fonction réelle quelconque dérivable. Alors  $L$ ,  $L_1$ , et  $L_2$  décrivent la même évolution.

**Preuve:**

- i) La relation (2.97) découle directement de la forme des équations de Lagrange (2.37) qui est linéaire en  $L$ .
- ii) Vérifions que si  $L$  satisfait aux équations de Lagrange,  $\tilde{L}_2$  les satisfait également :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial q_i} \stackrel{(2.98)}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) \quad (2.99)$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{j=1}^l \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (2.100)$$

que l'on insère dans (2.99) pour obtenir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t)}_{=0}. \quad (2.101)$$

■

Remarquons de même que si deux lagrangiens diffèrent d'une dérivée totale comme selon l'Eq. (2.98), alors leurs moments conjugués seront identiques. Par contre, si deux lagrangiens diffèrent d'une constante multiplicative  $\lambda$  comme selon l'Eq. (2.97), alors leurs moments conjugués seront différents mais la dynamique issue des équations de Lagrange sera la même.

**Exemple:** lagrangiens qui diffèrent par un terme additif. Soit une particule chargée dans un champ électromagnétique, alors nous avons vu dans la Sect. 2.3.4 que le potentiel généralisé d'un tel système est

$$u(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = q\phi(\mathbf{x}, t) - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}}, \quad (2.102)$$

le lagrangien étant

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - u(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t). \quad (2.103)$$

On définit la *transformation de jauge* du potentiel généralisé comme suit. Soit  $\lambda(\mathbf{x}, t)$  une fonction dérivable, alors les nouveaux potentiels scalaire  $\tilde{\phi}$  et vecteur  $\tilde{\mathbf{A}}$  sont définis par

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \lambda(\mathbf{x}, t) \quad (2.104a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla \lambda(\mathbf{x}, t). \quad (2.104b)$$

Comment se traduit *l'invariance de jauge* dans le formalisme lagrangien ? Sous cette transformation, le nouveau lagrangien  $\tilde{L}$  devient

$$\tilde{L} = L + \underbrace{q \frac{\partial \lambda}{\partial t} + q \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \lambda}_{= q \frac{d\lambda(\mathbf{x}, t)}{dt}}. \quad (2.105)$$

Ainsi  $L$  et  $\tilde{L}$  diffèrent par la dérivée totale  $d\lambda(\mathbf{x}, t)/dt$ , et par la proposition 2.2 ces deux lagrangiens satisfont aux mêmes équations de Lagrange, d'où l'invariance de jauge du formalisme.  $\diamond$

### 2.5.3 Lois de conservation

Les lois de conservation jouent un rôle primordial en physique. En effet, elles traduisent certaines propriétés physiques fondamentales et permettent souvent de tirer une information importante sur le système dans l'optique de la résolution des équations du mouvement.

#### 2.5.3.1 Variables cycliques

**Définition 2.6** Soit  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l) \in \mathbb{R}^l$ , soit  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  un lagrangien indépendant de la coordonnée  $q_i$  :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.106)$$

alors on dit que  $q_i$  est une **variable cyclique**.

**Lemme 2.1** Soit un système lagrangien admettant une variable cyclique  $q_i$ , alors le moment  $p_i$  conjugué à cette variable cyclique est une constante du mouvement (ou intégrale première)

**Preuve:** soit une telle variable cyclique  $q_i$ , alors l'équation de Lagrange pour cette variable devient

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (2.107)$$

Par conséquent le moment conjugué  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  à la variable cyclique  $q_i$  est indépendant du temps.  $\blacksquare$

#### Exemples:

- Soit une particule ponctuelle de masse  $m$  dans  $\mathbb{R}^3$  soumise au potentiel central  $V(r)$ . Par conséquent le mouvement est plan, et il existe donc un choix de coordonnées cylindriques tel que

$$L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r). \quad (2.108)$$

Le lagrangien (2.108) étant indépendant de  $\theta$ , cette variable est cyclique donc le moment conjugué associé

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r(mr\dot{\theta}) \quad (2.109)$$

est une constante du mouvement. Il s'agit du moment angulaire.

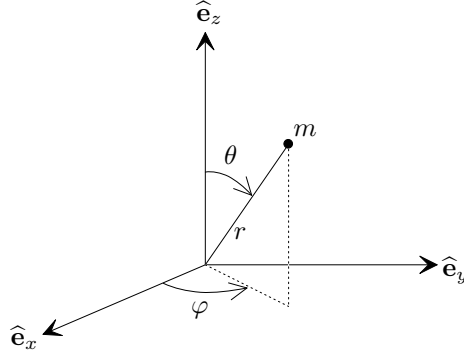


FIG. 2.9 – Coordonnées sphériques.

- Soit une particule ponctuelle de masse  $m$  dans  $\mathbb{R}^3$  soumise au potentiel  $V(r, \theta)$  indépendant de  $\varphi$  (cf. Fig. 2.9).  
Le lagrangien est donc

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) - V(r, \theta). \quad (2.110)$$

Le lagrangien (2.110) étant indépendant de  $\varphi$ , cette variable est cyclique donc le moment conjugué associé

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r \sin \theta (m r \sin \theta \dot{\varphi}) \quad (2.111)$$

est une constante du mouvement. Il s'agit du moment angulaire autour de l'axe  $\hat{e}_z$ .  $\diamond$

On voit de ces exemples qu'il existe une connexion entre une symétrie du système et l'existence de lois de conservation. L'exploitation de cette idée sera l'objet du théorème de Noether (cf. Sect. 2.5.3.3).

### 2.5.3.2 Homogénéité du temps

**Proposition 2.3** Soit  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l) \in \mathbb{R}^l$ , soit le lagrangien  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sans dépendance explicite dans le temps, alors la grandeur

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.112)$$

est conservée au cours de l'évolution (intégrale première) :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (2.113)$$

**Preuve:** par hypothèse on a  $\partial L/\partial t = 0$ , donc une vérification directe donne :

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
&= \sum_{i=1}^l \left[ \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{= \frac{\partial L}{\partial q_i}} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] - \left[ \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] \\
&= -\frac{\partial L}{\partial t} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.114}$$

■

**Lemme 2.2** Soit un système décrit par  $N$  coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , soit

i)  $0 \leq C < N$  contraintes holonômes scléronômes,

ii) un potentiel ne dépendant pas explicitement du temps (ou autonome)  $V(\mathbf{q})$  indépendant des vitesses généralisées,

où  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l) \in \mathbb{R}^l$  sont les  $l = N - C$  coordonnées généralisées indépendantes. Si  $T$  est l'énergie cinétique du système, alors

$$\varepsilon = T + V = E \tag{2.115}$$

est l'énergie totale du système.

**Preuve:** comme les  $C$  contraintes sont supposées holonômes, alors les  $N$  coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x}$  peuvent être exprimées en fonction des  $l = N - C$  coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$ , donc  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$ . De plus, comme les contraintes sont supposées scléronômes, les coordonnées cartésiennes ne dépendent pas explicitement du temps :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ . L'énergie cinétique du système est alors<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{d}{dt} x_i(\mathbf{q}) \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^l \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^l \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)}_{\doteq \alpha_{jk}(\mathbf{q})} \dot{q}_j \dot{q}_k,
\end{aligned} \tag{2.116}$$

où  $m_i$  est la masse de la particule de coordonnée  $x_i$ . On remarque de plus que l'énergie cinétique ainsi définie est une *fonction homogène de degré 2* (cf. annexe A.4) en les  $\dot{\mathbf{q}}$ , c'est-à-dire que

$$\sum_{i=1}^l \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \stackrel{(2.116)}{=} \sum_{i=1}^l \dot{q}_i \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^l \alpha_{jk} (\delta_{ji} \dot{q}_k + \dot{q}_j \delta_{ik}) = 2T. \tag{2.117}$$

<sup>1</sup>Nous avons inclus toutes les coordonnées nécessaires à la description de l'état du système dans le seul vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ . Si la dimension  $d$  est supérieure à 1, le système sera donc en général formé de moins de  $N$  particules.

En insérant l'Eq. (2.117) dans la définition (2.112) de  $\varepsilon$  il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon &\stackrel{(2.112)}{=} \sum_{i=1}^l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \underbrace{\sum_{i=1}^l \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i}_{=0} - L \\ &\stackrel{(2.117)}{=} 2T - (T - V) \\ &= T + V, \end{aligned} \tag{2.118}$$

ce qui est bien l'énergie totale du système.  $\blacksquare$

**Remarque:** Dans la preuve qui précède, l'hypothèse selon laquelle les contraintes sont scléronômes est équivalente à dire que l'énergie cinétique est une *forme quadratique homogène en les vitesses généralisées*. En général, si les contraintes sont a priori rhéonômes on a  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, \dots, q_l, t)$ , et

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^l \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^l \alpha_{jk}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^l b_j(\mathbf{q}, t) \dot{q}_j + c(\mathbf{q}, t), \end{aligned} \tag{2.119}$$

avec

$$\alpha_{jk}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \tag{2.120}$$

$$b_j(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial t}, \tag{2.121}$$

$$c(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2. \tag{2.122}$$

$T$  est donc une forme quadratique homogène en les vitesses généralisées si  $b_j = 0 \forall j$  et  $c = 0$ , ce qui est le cas pour des contraintes scléronômes. Ainsi, on obtient un critère facilement utilisable pour déterminer si la constante du mouvement  $\varepsilon$  représente l'énergie ou une autre grandeur : il suffit de vérifier si l'énergie cinétique est une forme quadratique homogène en  $\dot{\mathbf{q}}$ . On verra dans la Sect. 3.2 que  $\varepsilon$  est l'hamiltonien du système dans un cas particulier.  $\diamond$

### 2.5.3.3 Symétries et lois de conservation : le théorème de Noëther

Dans cette section, nous montrons et exploitons le fait qu'à toute symétrie du lagrangien est associée une grandeur conservée.

Soit  $\mathcal{S}$  une application différentiable de l'espace de configuration  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l) \in \mathbb{R}^l$  dans lui-même

$$\mathbf{q} \mapsto \mathcal{S}(\mathbf{q}) = (\mathcal{S}(\mathbf{q})_1, \dots, \mathcal{S}(\mathbf{q})_l) \in \mathbb{R}^l. \tag{2.123}$$

Dans l'espace des coordonnées généralisées, on a

$$\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\} \mapsto \{\mathcal{S}(\mathbf{q}), \dot{\mathcal{S}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\}, \tag{2.124}$$



où

$$\dot{\mathcal{S}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{d}{dt} \mathcal{S}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (2.125)$$

**Définition 2.7** On dit que  $\mathcal{S}$  est une *symétrie du système* si  $\mathcal{S}$  laisse le lagrangien  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  invariant, c'est-à-dire

$$L(\mathcal{S}(\mathbf{q}), \dot{\mathcal{S}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2.126)$$

**Lemme 2.3** Soit  $\mathcal{S}$  une symétrie du système, alors l'image par  $\mathcal{S}$  d'une solution des équations de Lagrange est aussi solution de ces mêmes équations.

**Preuve:** soit  $\mathbf{q}(t)$  une solution des équations de Lagrange, alors  $\mathbf{q}(t)$  rend l'action extrémale. Comme  $\mathcal{S}$  laisse le lagrangien  $L$  invariant, l'image par  $\mathcal{S}$  de  $\mathbf{q}(t)$  rend de même l'action extrémale et par conséquent est aussi une solution des équations de Lagrange. ■

**Définition 2.8** Soit  $\Sigma = \{\mathcal{S}_\alpha | \alpha \in \mathbb{R}\}$  un ensemble d'applications différentiables par rapport à  $\alpha$ , alors on dit que  $\Sigma$  est un *groupe de symétrie continu à 1 paramètre* si  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{S}_\alpha$  est une symétrie du système et

$$\mathcal{S}_0 = \mathbb{1}, \quad (2.127a)$$

$$\mathcal{S}_{\alpha_1} \cdot \mathcal{S}_{\alpha_2} = \mathcal{S}_{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (2.127b)$$

**Théorème 2.2 (Noëther)** Soit  $\Sigma = \{\mathcal{S}_\alpha | \alpha \in \mathbb{R}\}$  un groupe de symétrie continu à 1 paramètre,  $\mathcal{S}_\alpha = (\mathcal{S}_{\alpha 1}, \dots, \mathcal{S}_{\alpha l})$ , alors

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[ \frac{d}{d\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{q})_i \right]_{\alpha=0} \quad (2.128)$$

est une constante du mouvement (ou intégrale première).

**Preuve:** notons  $\mathbf{Q}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{q})$ ,  $\dot{\mathbf{Q}}_\alpha = \dot{\mathcal{S}}_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , où

$$\mathbf{Q}_\alpha = (Q_{\alpha 1}, \dots, Q_{\alpha l}, t) = (\mathcal{S}_\alpha(\mathbf{q})_1, \dots, \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{q})_l, t). \quad (2.129)$$

Comme  $\mathcal{S}_\alpha$  est une symétrie du système, alors

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t). \quad (2.130)$$

L'application de l'opérateur  $d/d\alpha$  sur les deux membres de l'Eq. (2.130) fournit

$$\frac{d}{d\alpha} L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t) = 0. \quad (2.131)$$

En développant l'Eq. (2.131) on obtient

$$\frac{d}{d\alpha} L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t) = \sum_{i=1}^l \left( \underbrace{\frac{\partial L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t)}{\partial Q_{\alpha i}}}_{= \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t)}{\partial Q_{\alpha i}}} \frac{dQ_{\alpha i}}{d\alpha} + \frac{\partial L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t)}{\partial \dot{Q}_{\alpha i}} \underbrace{\frac{d\dot{Q}_{\alpha i}}{d\alpha}}_{= \frac{d}{dt} \frac{dQ_{\alpha i}}{d\alpha}} \right) = 0. \quad (2.132)$$

En effet, par définition  $L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t)$  vérifie aussi les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t)}{\partial \dot{Q}_{\alpha i}} = \frac{\partial L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t)}{\partial Q_{\alpha i}}. \quad (2.133)$$

Développant l'Eq. (2.132), il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t) &= \sum_{i=1}^l \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha i}} \right) \frac{dQ_{\alpha i}}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha i}} \frac{d}{dt} \frac{dQ_{\alpha i}}{d\alpha} \right] \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha i}} \frac{dQ_{\alpha i}}{d\alpha} \right) \\ &\stackrel{(2.129)}{=} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha i}} \frac{d}{d\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{q})_i \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Ce résultat étant vrai pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on prend la limite  $\alpha \rightarrow 0$  pour s'affranchir de la dépendance du résultat final dans le paramètre de symétrie. Comme  $\mathcal{S}_{\alpha=0} = 1$ , on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\alpha} L(\mathbf{Q}_\alpha, \dot{\mathbf{Q}}_\alpha, t) \right|_{\alpha=0} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[ \left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{q})_i \right]_{\alpha=0} = 0, \\ \implies \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[ \left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{q})_i \right]_{\alpha=0} &= \text{cte}|_t, \end{aligned} \quad (2.135)$$

ce qui achève la preuve. ■

Notons que  $d\mathcal{S}_\alpha/d\alpha|_{\alpha=0}$  est aussi appelé le *générateur infinitésimal* du groupe de symétrie.

Le théorème de Nøther traduit le principe fondamental de la nature selon lequel il y a équivalence entre les concepts de symétrie, invariance, et loi de conservation. Regardons à présent quelques conséquences du théorème de Nøther.

**Invariance sous les translations spatiales :** soit un système de  $N$  points matériels dans  $\mathbb{R}^3$  interagissant par le biais de forces conservatives dérivant d'un potentiel  $V(\mathbf{x})$  invariant par translations et ne dépendant que des positions. Notons  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N}$  les coordonnées des particules, et  $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, x_3)$  donne la position de la première particule,  $\dots$ ,  $\mathbf{x}_N = (x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$  celle de la dernière. Le potentiel vérifie alors

$$V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = V(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{x}_N + \mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.136)$$

On dit dans le cas de l'invariance par translation spatiale que *l'espace est homogène*. Le lagrangien est donc

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - V(\mathbf{x}), \quad (2.137)$$

où  $m_i$  sont les masses des particules. Fixons une direction arbitraire dans  $\mathbb{R}^3$  par le vecteur unité  $\hat{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ . La symétrie du système s'écrit

$$\mathcal{S}_\alpha(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = (\mathbf{x}_1 + \alpha \hat{\mathbf{a}}, \dots, \mathbf{x}_N + \alpha \hat{\mathbf{a}}) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.138)$$

Le théorème de Noëther fournit donc la constante du mouvement

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left[ \frac{d}{d\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{x})_i \right]_{\alpha=0} \\
&\stackrel{(2.137)}{=} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}} \\
&= \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{a}},
\end{aligned} \tag{2.139}$$

où on a noté

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \tag{2.140}$$

l'impulsion totale du système. La constante du mouvement ainsi fournie par le théorème de Noëther est la composante dans la direction  $\hat{\mathbf{a}}$  de la quantité de mouvement totale du système. Comme le vecteur unité  $\hat{\mathbf{a}}$  est quelconque, on peut faire cette démarche sur une base de 3 vecteurs orthogonaux et ainsi obtenir la conservation de chaque composante de l'impulsion totale. On en conclut que *si l'espace est homogène, la quantité de mouvement totale du système est une constante du mouvement.*  $\diamond$

**Invariance sous les rotations :** soit  $N$  particules ponctuelles dans  $\mathbb{R}^3$  et adoptons les mêmes notations que pour l'exemple précédent. Soit  $\mathbf{R}_\alpha$  une rotation d'angle  $\alpha \in \mathbb{R}$  autour d'une direction  $\hat{\mathbf{a}}$  fixée, supposons que le potentiel soit invariant sous rotation

$$V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = V(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_N). \tag{2.141}$$

On dit dans le cas de l'invariance par rotation que *l'espace est isotrope*. La symétrie du système s'écrit :

$$\mathcal{S}_\alpha(\mathbf{x}) = (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.142}$$

Pour appliquer le théorème de Noëther nous avons besoin du résultat préliminaire suivant. Soit  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , alors la rotation de  $\mathbf{y}$  d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe défini par la direction  $\hat{\mathbf{a}}$  s'écrit

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} = (\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{y}) \hat{\mathbf{a}} + (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{y}) \sin \alpha - \hat{\mathbf{a}} \times (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{y}) \cos \alpha. \tag{2.143}$$

Appliquant l'Eq. (2.143) à la symétrie (2.142) on obtient ( $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$ ) :

$$\frac{d\mathcal{S}_\alpha(\mathbf{x})_i}{d\alpha} = (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{x}_i) \cos \alpha + \hat{\mathbf{a}} \times (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{x}_i) \sin \alpha. \tag{2.144}$$

Le théorème de Noëther fournit donc la constante du mouvement

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left[ \frac{d}{d\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{x})_i \right]_{\alpha=0} \\
&\stackrel{(2.144)}{=} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{x}_i) \\
&= \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{x}_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}_i) \\
&= \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{L},
\end{aligned} \tag{2.145}$$

où on a noté

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i) \quad (2.146)$$

le moment cinétique total du système. Comme le vecteur unité  $\hat{\mathbf{a}}$  est quelconque, on peut faire cette démarche sur une base de 3 vecteurs orthogonaux et ainsi obtenir la conservation de chaque composante du moment cinétique total. On en conclut que *si l'espace est isotrope, le moment cinétique total du système est une constante du mouvement.*  $\diamond$

## Chapitre 3

# Le formalisme hamiltonien

### 3.1 Introduction

Nous avons vu que le formalisme lagrangien recourt aux variables  $q$  et  $\dot{q}$  et permet d'établir les équations du mouvement sous la forme d'un système d'équations différentielles du second ordre. La solution des équations de Lagrange décrit alors une trajectoire dans l'*espace de configuration*  $\{q\}$ . Pour certaines applications il est judicieux d'introduire un formalisme dans lequel les variables indépendantes (variables canoniquement conjuguées)  $q$  et  $p$  (où  $p$  est le moment conjugué à  $q$ ) jouent un rôle symétrique. L'ensemble de ces variables définissent l'*espace des phases*  $\Gamma = \{q, p\}$ . L'opérateur d'évolution dans cet espace et appelé l'hamiltonien est défini comme la transformée de Legendre du lagrangien. Les équations d'évolution sont alors des équations aux dérivées partielles du premier ordre appelées les équations de Hamilton.

L'étude des trajectoires dans l'espace des phases conduit à deux résultats importants : les théorèmes de Liouville et de Poincaré. Ce dernier a d'importantes conséquences concernant les questions de réversibilité ou d'irréversibilité de l'évolution des systèmes physiques [10].

Ce chapitre se poursuit avec l'étude des transformations canoniques. Existe-t-il des d'autres variables  $Q$  et  $P$ , canoniquement conjuguées, telles que les équations de Hamilton pour ces nouvelles variables soient plus simple à résoudre ? Si oui comment trouver ces variables et quel est le nouvel hamiltonien ? Les réponses à ces questions nous conduiront à la théorie de Hamilton-Jacobi ainsi qu'à la description en termes de variables angle-action.

Une brève discussion de la classification des systèmes en systèmes intégrables et non-intégrables sera abordée.

Finalement, le chapitre se termine par une étude du problème à trois corps restreint.

Ce formalisme hamiltonien joue un rôle très important en mécanique statistique et mécanique quantique.

### 3.2 Hamiltonien et transformée de Legendre du lagrangien

**Définition 3.1** *Soit un système lagrangien holonôme, avec forces dérivant d'un potentiel (généralisé). Soit  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$ ,  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  le lagrangien du système,  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$*

le moment conjugué à  $q_i$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_l)$ , alors on définit l'**hamiltonien** du système  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  par

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), t), \quad (3.1)$$

où les vitesses généralisées  $\dot{q}_i$  sont exprimées en fonction des moments conjugués  $\mathbf{p}$  et des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$ .

**Lemme 3.1** Soit  $L$  le lagrangien du système, alors l'hamiltonien est la transformée de Legendre de  $-L$  par rapport à  $\dot{\mathbf{q}}$ .

**Preuve:** pour un rappel sur la transformation de Legendre, on renvoie à l'annexe A.5. En particulier, se référant à la définition A.4 (page 183) et en identifiant  $f$  avec  $-L$ ,  $x_i$  avec  $\dot{q}_i$ , alors on voit que la transformée de Legendre de  $-L$  est bien l'hamiltonien défini par (3.1). ■

### 3.2.1 Les équations canoniques de Hamilton

**Définition 3.2** Soit  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  l'hamiltonien du système, alors la dynamique est donnée par les **équations canoniques de Hamilton** :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i &= 1, \dots, l, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & i &= 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Preuve:** montrons que les équations canoniques décrivent bien l'évolution du système. Remarquons d'abord que les équations de Lagrange peuvent être écrites sous la forme

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.3)$$

Soit

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), t), \quad (3.4)$$

alors la différentielle totale de  $H$  est

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^l p_i dq_i + \sum_{i=1}^l dp_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\stackrel{(3.3)}{=} \dot{p}_i} dq_i - \sum_{i=1}^l \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\stackrel{\text{déf.}}{=} p_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= -\sum_{i=1}^l \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mais d'autre part comme  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , la différentielle totale de  $H$  s'écrit aussi

$$dH = \sum_{i=1}^l \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (3.6)$$

La comparaison et l'égalité des Eqs. (3.5) et (3.6) fournit les relations  $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$  et  $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$ , ce qui achève la preuve. ■

**Lemme 3.2** *Soit  $L$  le lagrangien du système,  $H$  l'hamiltonien, alors*

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.7)$$

**Preuve:** reprenant la preuve précédente, la comparaison des Eqs. (3.5) et (3.6) fournit la relation  $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$ . De plus, de l'Eq. (3.6) on voit que

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \stackrel{(3.2)}{=} \sum_{i=1}^l (-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (3.8)$$

d'où le résultat (3.7). ■

**Lemme 3.3** *Soit un lagrangien qui ne dépend pas explicitement du temps (autonôme), alors  $H$  est une constante du mouvement. Si de plus les contraintes sont scléronômes et le potentiel ne dépend que des positions (ce qui est équivalent à dire que l'énergie cinétique est une forme quadratique homogène en les vitesses généralisées), alors  $H = E$  est l'énergie totale du système.*

**Preuve:** le fait que  $H$  soit une constante du mouvement si  $L$  est autonome découle directement du lemme 3.2. Si  $L$  est autonome cela signifie que la symétrie du système est la translation dans le temps, donc il y a homogénéité du temps. Dans ce cas, nous avons vu dans la section 2.5.3.2 que la grandeur  $\varepsilon$  était conservée au cours du temps. Nous constatons de plus des Eqs. (2.112) et (3.1) que  $\varepsilon = H$  est l'hamiltonien du système. Ainsi, par le lemme 2.2, si le potentiel ne dépend que des positions et les contraintes sont holonomes scléronômes (ou bien si l'énergie cinétique est une forme quadratique homogène en les vitesses généralisées) alors  $H = E$  est bien l'énergie totale du système. ■

### 3.2.2 Evolution hamiltonienne et crochets de Poisson

**Définition 3.3** *Soient  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  deux fonctions sur l'espace des phases, alors on définit les **crochets de Poisson** de  $F$  et  $G$  par*

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (3.9)$$

**Lemme 3.4** *Soit  $H$  l'hamiltonien du système, alors l'évolution d'une fonction  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  sur l'espace des phases est donnée par*

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}}. \quad (3.10)$$

**Preuve:** par vérification directe, on a

$$\frac{dF}{dt}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^l \left( \underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_i}}_{(3.2) \frac{\partial H}{\partial p_i}} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial p_i}}_{(3.2) -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \stackrel{(3.9)}{=} \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.11)$$

■

**Remarque:** les cas particuliers suivants du lemme 3.4 redonnent les équations canoniques.

– Si  $F = q_i$ , alors

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\} = \sum_{j=1}^l \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_j}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (3.12)$$

– Si  $F = p_i$ , alors

$$\frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\} = - \sum_{j=1}^l \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_j}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.13)$$

◇

**Lemme 3.5** Soit  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  qui ne dépend pas explicitement du temps et qui commute avec  $H$  dans le sens  $\{F, H\} = 0$ , alors  $F$  est une constante du mouvement.

**Preuve:** le résultat est immédiat par le lemme 3.4

■

**Remarque:** il existe une analogie formelle entre l'évolution hamiltonienne en termes de crochets de Poisson et l'évolution d'observables en mécanique quantique dans la représentation de Heisenberg. Soit  $[F, G] = FG - GF$  le commutateur entre deux observables  $F$  et  $G$ , soit  $H$  l'hamiltonien quantique, soit  $A(t) = e^{itH} A e^{-itH}$ , alors l'évolution de l'observable  $A$  est donnée par [11]

$$i\hbar \frac{d}{dt} A(t) = [A(t), H(t)] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A(t), \quad (3.14)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Par conséquent, si  $A$  commute avec  $H$ , alors  $A$  est une constante du mouvement.

◇

**Exemples:** regardons deux applications simples du formalisme hamiltonien.

i) Oscillateur harmonique : soit un système unidimensionnel de lagrangien

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2, \quad (3.15)$$

alors

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}, \quad (3.16)$$

d'où

$$\dot{q}(p) = \frac{p}{m}. \quad (3.17)$$



Les Eqs. (3.15) et (3.16) fournissent l'hamiltonien

$$H(q, p) = p\dot{q}(p) - L(q, \dot{q}(p)) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2. \quad (3.18)$$

Les équations canoniques du système sont :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (3.19a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq. \quad (3.19b)$$

D'autre part, comme  $L$  ne dépend pas explicitement du temps, alors

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.20)$$

est une constante du mouvement. L'énergie cinétique étant une forme quadratique homogène,  $E$  est bien l'énergie totale du système.

- ii) Chute libre : cet exemple permet d'illustrer que la non-unicité du lagrangien implique la non-unicité de l'hamiltonien. La différence est cette fois que contrairement aux équations de Lagrange, la forme des équations canoniques est modifiée. Cependant, la dynamique reste bien la même. Soit une masse ponctuelle  $m$  en chute libre dans  $\mathbb{R}^3$ , sans frottement. Soit  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$  le champ de gravitation, alors le lagrangien est

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}. \quad (3.21)$$

Les moments conjugués sont  $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i = m\dot{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . L'hamiltonien du système est :

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i(\mathbf{p}) - L(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}. \quad (3.22)$$

Ainsi, les équations canoniques sont :

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m}, \quad (3.23a)$$

$$\dot{p}_i = mg_i. \quad (3.23b)$$

D'autre part, la proposition 2.2 établit que deux lagrangiens  $L$  et  $\tilde{L}$  qui diffèrent de la dérivée temporelle d'une fonction indépendante des vitesses généralisées définissent la même évolution :

$$\tilde{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}, t). \quad (3.24)$$

Par conséquent, le lagrangien

$$\tilde{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} - \frac{d}{dt} [m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}t - \frac{1}{6}\mathbf{g}^2 t^3)] \quad (3.25)$$

décrit la même dynamique que  $L$ . Regardons quelles sont les équations canoniques qui en découlent. On a

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i - mg_i t, \quad (3.26)$$

et le nouvel hamiltonien

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{p}}, t) = \sum_{i=1}^3 \tilde{p}_i \dot{x}_i(\tilde{\mathbf{p}}) - \tilde{L}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{p}}, t). \quad (3.27)$$

Les équations de Hamilton associées pour  $i = 1, \dots, 3$  :

$$\dot{x}_i = \frac{\tilde{p}_i}{m} + g_i t, \quad (3.28a)$$

$$\dot{\tilde{p}}_i = 0. \quad (3.28b)$$

Quelle est l'interprétation de ces équations ? Le lagrangien (3.25) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\tilde{L}(\dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{g}t)^2 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{x}}t + \frac{1}{2}m\mathbf{g}^2 t^2, \quad (3.29)$$

et alors

$$\tilde{p}_i = m(\dot{x}_i - g_i t). \quad (3.30)$$

Comme  $x_i$  est une variable cyclique, alors  $\tilde{p}_i$  est une constante du mouvement. L'Eq. (3.30) fournit ainsi :

$$\dot{x}_i(t) = \dot{x}_i(0) + g_i t, \quad (3.31)$$

donc

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2. \quad (3.32)$$

La trajectoire ainsi trouvée est bien la même que celle découlant des équations canoniques (3.23). Par contre, l'impulsion généralisée issue de  $\tilde{L}$  représente la quantité de mouvement dans le référentiel en chute libre.

Cet exemple simple montre que l'hamiltonien ainsi que les équations de Hamilton associées dépendent du choix des coordonnées et de la forme particulière du lagrangien. Par contre, les solutions des équations canoniques restent les mêmes.  $\diamond$

### 3.2.3 Renversement du temps

**Définition 3.4** On définit l'opérateur de **renversement du temps**  $\tau$  par son action sur les coordonnées généralisées  $q_i$  et moments conjugués  $p_i$  :

$$\tau(q_i, p_i, t) = (q_i, -p_i, -t), \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.33)$$

Par exemple, soit une particule ponctuelle de masse  $m$  en dimension 1, où  $q$  est sa position et  $p = m\dot{q}$  son impulsion. Alors si on renverse le temps  $t \rightarrow -t$  on voit que  $\dot{q} \rightarrow -\dot{q}$ , d'où  $p \rightarrow -p$ , ce qui correspond à l'action de  $\tau$ .

**Lemme 3.6** Soit un système autonome dont l'hamiltonien est une fonction paire des moments conjugués, alors les équations canoniques de Hamilton sont invariantes sous le renversement du temps.

**Preuve:** soit  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_l)$ , alors comme l'hamiltonien  $H$  est une fonction autonome paire des moments conjugués,  $H$  est invariant sous le renversement du temps :

$$H(\tau(\mathbf{q}), \tau(\mathbf{p})) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (3.34)$$

De plus :

$$\tau(\dot{q}_i) = \frac{d\tau(q_i)}{d\tau(t)} \stackrel{(3.33)}{=} -\dot{q}_i, \quad (3.35)$$

$$\tau(\dot{p}_i) = \frac{d\tau(p_i)}{d\tau(t)} \stackrel{(3.33)}{=} \dot{p}_i, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau(p_i)}(\tau(\mathbf{q}), \tau(\mathbf{p})) \stackrel{(3.33)}{=} -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau(q_i)}(\tau(\mathbf{q}), \tau(\mathbf{p})) \stackrel{(3.33)}{=} \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.38)$$

On constate donc que les équations de Hamilton issues des Eqs. (3.35) à (3.38) sont identiques à la définition (3.2). ■

### 3.3 Théorèmes de Liouville et de Poincaré

#### 3.3.1 L'espace des phases

La solution des équations de Lagrange à  $l$  degrés de liberté est représentée par la trajectoire d'un point dans un espace de configuration de dimension  $l$ . Le problème consiste donc à trouver les  $l$  fonctions  $q_i(t)$  en terme des conditions initiales  $q_i(t_0)$ . Les valeurs de  $\dot{q}_i(t)$  donnent donc la tangente à  $q_i(t)$  dans l'espace de configuration. Le désavantage de cette étude dans l'espace de configuration est qu'en un point donné, il peut y avoir un nombre infini de différents chemins qui y passent en un temps donné (avec des vitesses différentes). Les équations de Hamilton consistent en  $2l$  équations couplées de premier ordre. Ces équations décrivent l'évolution des variables  $q_i$  et de leurs moments conjugués  $p_i$ . Ces  $2l$  variables sont considérées indépendantes. La solution des équations de Hamilton décrit ainsi la trajectoire d'une particule dans un espace de dimension  $2l$ . Cet espace de dimension  $2l$  décrit par  $\{q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l\}$  est appelé *espace des phases*  $\Gamma$ . Ainsi chaque point dans l'espace des phases représente une combinaison différente des coordonnées généralisées et de leurs moments conjugués [10]. Si les équations de mouvement sont autonomes, c'est-à-dire, ne dépendent pas explicitement du temps, l'unicité des solutions implique qu'en chaque point de l'espace des phases il ne passe qu'une et unique solution correspondant à des conditions initiales données. Ceci implique que deux trajectoires issues de conditions initiales différentes ne se recoupent jamais dans l'espace des phases. L'*état du système* au temps  $t$  est donc décrit par la donnée des  $\{q_i, p_i\}_{i=1}^l \in \Gamma$ . La dynamique déplace un point représentatif de  $\Gamma$  sur une *trajectoire*, ou *ligne de flot* (cf. Fig 3.1).

Le *flot hamiltonien* (solution dans l'espace des phases) possède des propriétés importantes qui s'expriment par les théorèmes de Liouville et de Poincaré (ce dernier étant une conséquence du théorème de Liouville).

#### 3.3.2 Le théorème de Liouville

Au lieu de considérer une seule ligne de flot dans  $\Gamma$ , on étudie l'ensemble de toutes les lignes de flot correspondant au même hamiltonien autonome, c'est-à-dire tel que  $\partial H/\partial t = 0$ . Cela revient à considérer toutes les trajectoires issues de conditions initiales différentes.

**Théorème 3.1 (Liouville)** *Soit un système hamiltonien autonome, alors tout volume  $V_0 \subseteq \Gamma$  de l'espace des phases est conservé lors de l'évolution.*

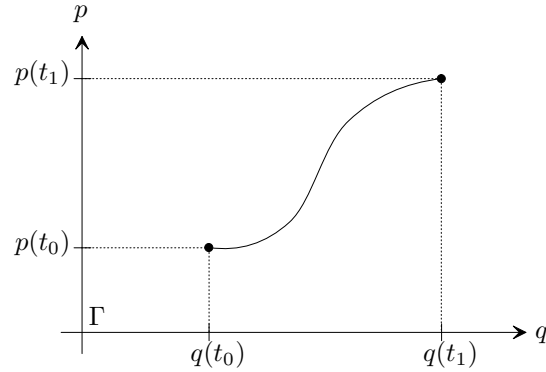


FIG. 3.1 – Ligne de flot dans l'espace des phases.

**Preuve:** soit  $V_0 \subset \Gamma$  un élément de volume au temps  $t_0$  dans l'espace des phases  $\Gamma$ , soit  $V_t \subset \Gamma$  son image sous le flot au temps  $t$ . Alors le théorème de Liouville affirme que pour tout système conservatif la mesure de ce volume est conservée au cours de l'évolution :  $V_0 = V_t$  (cf. Fig. 3.2).

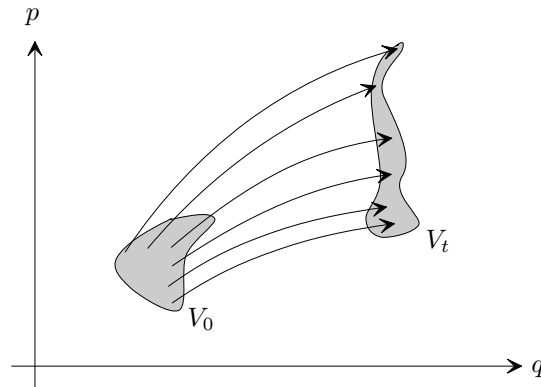


FIG. 3.2 – Evolution du volume dans l'espace des phases.

Soit  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_l)$ , soit  $\Sigma \subset \Gamma$ , alors on définit la densité  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  dans  $\Gamma$  par

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \lim_{|\Sigma| \rightarrow 0} \frac{N(\Sigma)}{|\Sigma|}, \quad (3.39)$$

où  $N(\Sigma)$  est le nombre de lignes de flot (ou le nombre de points si on discrétise la trajectoire) passant au temps  $t$  dans le volume  $\Sigma$  centré en  $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ . Avec une normalisation appropriée,  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  représente la densité de probabilité de trouver le système dans l'état  $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$  au temps  $t$ . Cette densité est normalisée sur l'espace des phases :

$$\int_{\Gamma} d\mathbf{q}d\mathbf{p} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 1. \quad (3.40)$$

Le théorème de Liouville affirme donc que la dérivée temporelle du volume de l'espace des phases est nulle. Par unicité de l'évolution hamiltonienne, le nombre  $N(\Sigma)$  de lignes de

flot est conservé par l'évolution. Donc si

$$\boxed{\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0}, \quad (3.41)$$

alors de l'Eq. (3.39) le volume  $|\Sigma|$  de l'espace de phase est conservé. Il s'agit d'une formulation locale. L'Eq. (3.41) s'écrit aussi

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.42)$$

L'idée de la preuve est de prendre un volume infinitésimal  $\Delta V$ , écrire le bilan de probabilité dans ce volume, et finalement faire la limite  $\Delta V \rightarrow 0$  pour obtenir la forme locale (3.42) de conservation. La Fig. 3.3 illustre la méthode pour un système à 1 degré de liberté.

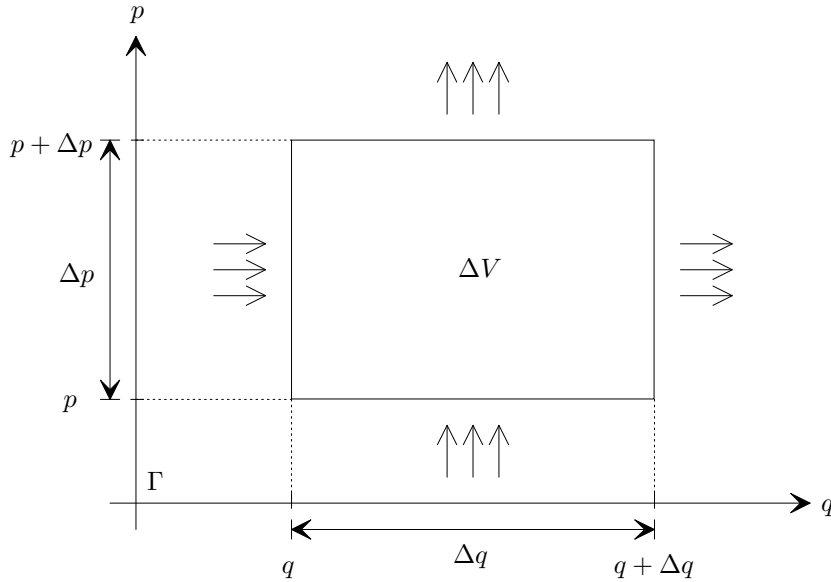


FIG. 3.3 – Bilan de densité de probabilité pour un degré de liberté.

Remarquons d'abord que les "points" traversant  $\Delta V$  dans la direction  $q_i$  (respectivement  $p_i$ ) le font avec une vitesse généralisée  $\dot{q}_i$  (respectivement  $\dot{p}_i$ ). En effet, si la particule est en  $q_i$  au temps  $t$ , et en  $q_i + \Delta q_i$  au temps  $t + \Delta t$ , alors la vitesse est donnée par

$$\frac{(q_i + \Delta q_i) - q_i}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta q_i}{\Delta t} \stackrel{\Delta V \rightarrow 0}{\Delta t \rightarrow 0} \dot{q}_i. \quad (3.43)$$

De même pour la direction  $p_i$  :

$$\frac{(p_i + \Delta p_i) - p_i}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta p_i}{\Delta t} \stackrel{\Delta V \rightarrow 0}{\Delta t \rightarrow 0} \dot{p}_i. \quad (3.44)$$

Le flux de probabilité traversant la surface orthogonale à  $q_i$  (respectivement  $p_i$ ) est :

$$j_{q_i}^{\text{in}} = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \prod_{j=1}^l \Delta p_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \Delta q_k, \quad \forall i = 1, \dots, l, \quad (3.45)$$

$$j_{p_i}^{\text{in}} = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \dot{p}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \prod_{j=1}^l \Delta q_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \Delta p_k, \quad \forall i = 1, \dots, l. \quad (3.46)$$

Ces dernières relations se justifient dans le sens où le domaine est supposé suffisamment petit pour que les vitesses généralisées  $\dot{q}_i$  et  $\dot{p}_i$  soient considérées constantes et égales aux vitesses en  $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ . Il ne s'agit pas d'une hypothèse dans le sens où à la fin de la preuve nous prenons explicitement la limite  $\Delta V \rightarrow 0$ , et ces écritures passent alors du statut d'hypothèse au statut de résultat exact. Dans les Eqs. (3.45) et (3.46), les produits représentent la surface de dimension  $2l - 1$  orthogonale à la direction  $q_i$  (respectivement  $p_i$ ). Les flux sur les surfaces en  $q_i + \Delta q_i$  et  $p_i + \Delta p_i$  sont donnés par

$$j_{q_i}^{\text{out}} = \rho(\mathbf{q} + \Delta q_i, \mathbf{p}, t) \dot{q}_i(\mathbf{q} + \Delta q_i, \mathbf{p}, t) \prod_{j=1}^l \Delta p_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \Delta q_k, \quad \forall i = 1, \dots, l, \quad (3.47)$$

$$j_{p_i}^{\text{out}} = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p} + \Delta p_i, t) \dot{p}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p} + \Delta p_i, t) \prod_{j=1}^l \Delta q_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \Delta p_k, \quad \forall i = 1, \dots, l. \quad (3.48)$$

Comme  $\Delta q_i$  et  $\Delta p_i$  sont petits, on peut développer les Eqs. (3.47) et (3.48) en série de Taylor autour de  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  en négligeant les termes d'ordre  $(\Delta q_i)^2$  et  $(\Delta p_i)^2$  :

$$\begin{aligned} j_{q_i}^{\text{out}} &= \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \prod_{j=1}^l \Delta p_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \Delta q_k \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \rho(\mathbf{q} + \Delta q_i, \mathbf{p}, t) \dot{q}_i(\mathbf{q} + \Delta q_i, \mathbf{p}, t) \right]_{\Delta q_i=0} \Delta q_i \prod_{j=1}^l \Delta p_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \Delta q_k \\ &= j_{q_i}^{\text{in}} + \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} \prod_{j=1}^l \Delta q_j \Delta p_j, \quad \forall i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (3.49)$$

et

$$\begin{aligned} j_{p_i}^{\text{out}} &= \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \dot{p}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \prod_{j=1}^l \Delta q_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \Delta p_k \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial p_i} \left[ \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p} + \Delta p_i, t) \dot{p}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p} + \Delta p_i, t) \right]_{\Delta p_i=0} \Delta p_i \prod_{j=1}^l \Delta q_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \Delta p_k \\ &= j_{p_i}^{\text{in}} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \prod_{j=1}^l \Delta q_j \Delta p_j, \quad \forall i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (3.50)$$

où on a noté  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  et  $\dot{p}_i = \dot{p}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Soit  $n_{\Delta V}$  la variation de probabilité dans  $\Delta V$ , alors  $n_{\Delta V}$  est donné par le bilan des flux :

$$\begin{aligned} n_{\Delta V} &= \sum_{i=1}^l (j_{q_i}^{\text{in}} + j_{p_i}^{\text{in}}) - \sum_{i=1}^l (j_{q_i}^{\text{out}} + j_{p_i}^{\text{out}}) \\ &\stackrel{(3.49)}{=} - \sum_{i=1}^l \left[ \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \right] \prod_{j=1}^l \Delta q_j \Delta p_j. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Or pour  $\Delta V$  petit, on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} n_{\Delta V} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' \rho(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \underbrace{\int_{\Delta V} d\mathbf{q}' d\mathbf{p}'}_{= \prod_{j=1}^l \Delta q_j \Delta p_j} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \prod_{j=1}^l \Delta q_j \Delta p_j. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Egalant les Eqs. (3.51) et (3.52) il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^l \left[ \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \right] \\ &= - \sum_{i=1}^l \underbrace{\left[ \dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right]}_{= \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt}} - \rho \sum_{i=1}^l \underbrace{\left[ \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right]}_{\stackrel{(3.2)}{=} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0} \\ &\implies \sum_{i=1}^l \left[ \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ &\implies \frac{d\rho}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

ce qui achève la preuve. Remarquons encore que dans la limite  $\Delta V \rightarrow 0$ , aussi bien les relations (3.43), (3.44) que (3.49), (3.50), et (3.52) deviennent des résultats exacts, d'où la forme locale (3.53) du théorème de Liouville. ■

#### Remarques:

- Il existe une analogie entre le théorème de Liouville et la dynamique des fluides. Si  $\rho(\mathbf{r}, t)$  est la densité de masse d'un fluide, alors l'équation de bilan de masse s'écrit sous forme locale

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (3.54)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse locale du fluide. Ainsi, la densité  $\rho$  est constante si  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , ce qui est la propriété d'un fluide incompressible (cf. Sect. 6.2.4). Dans ce sens, on peut formuler le théorème de Liouville comme suit : la densité  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  évolue comme un liquide incompressible dans  $\Gamma$ .

- Une formulation équivalente du théorème de Liouville est de dire que le jacobien de la transformation  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \mapsto (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  est égal à l'unité, où  $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0\}$  sont les conditions initiales. En effet, soit  $V_0$  un volume de l'espace des phases au temps  $t_0$  défini par

$$V_0 = \int_{D_0} d\mathbf{q}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (3.55)$$

où  $D_0 \subset \Gamma$  est le domaine au temps  $t_0$ . Soit  $D_t$  l'image sous le flot hamiltonien de  $D_0$  après un temps  $t$ , alors le volume correspondant s'écrit

$$V_t = \int_{D_t} d\mathbf{q}(t) d\mathbf{p}(t). \quad (3.56)$$

Si  $\phi_t = (\phi_1, \dots, \phi_{2l})$  est le flot hamiltonien, alors

$$q_i(t) = \phi_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t), \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.57)$$

$$p_i(t) = \phi_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t), \quad i = l + 1, \dots, 2l. \quad (3.58)$$

De plus

$$V_t = \int_{D_t} d\mathbf{q}(t) d\mathbf{p}(t) = \int_{D_0} d\mathbf{q}_0 d\mathbf{p}_0 \tilde{\mathbb{J}}, \quad (3.59)$$

où  $\tilde{\mathbb{J}}$  est le *jacobien* de la transformation  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \mapsto (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  défini par

$$\tilde{\mathbb{J}} = \left| \det \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial Y_j} \right\}_{i,j=1}^{2l} \right|, \quad (3.60)$$

avec  $\mathbf{Y} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2l}$ . Le théorème de Liouville affirme que  $V_0 = V_t$ , ce qui revient donc à dire que le jacobien  $\tilde{\mathbb{J}} = 1$ . Ainsi, *pour tout système hamiltonien autonome, le jacobien de la transformation reliant les variables au temps  $t$  aux conditions initiales est égal à l'unité*. On dit aussi que *la mesure de Liouville est invariante*.

Notons encore que cette dernière formulation du théorème de Liouville ne considère qu'une unique trajectoire. Ceci diffère de la formulation faisant intervenir la densité  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  qui elle considère un ensemble de trajectoires. Néanmoins, le contenu physique de ces deux formulations est bien le même. ◇

### 3.3.3 Le théorème de Poincaré

**Théorème 3.2 (Poincaré)** *Soit un système hamiltonien autonome, soit  $\phi_t$  le flot hamiltonien, soit  $D \subset \Gamma$  un domaine de mesure finie qui soit invariant sous le flot  $\phi_t D \subset \Gamma \forall t$ , alors dans tout voisinage de mesure non nulle  $U \subseteq D$  d'un point quelconque  $y \in \overset{\circ}{D}$  il existe un point  $x \in U$  qui retourne dans  $U$  après un certain temps.*

Nous avons utilisé la notation  $\overset{\circ}{D}$  pour l'intérieur de  $D$ . Avant de passer à la preuve du théorème, il est instructif de faire quelques remarques. La Fig. 3.4 illustre le théorème de Poincaré.

Le théorème de Poincaré est aussi parfois appelé *théorème de récurrence de Poincaré*. En effet, le voisinage  $U$  peut être arbitrairement petit, mais pas réduit à un point. Donc si les hypothèses du théorème sont satisfaites et si l'état du système est initialement décrit par  $x \in \Gamma$ , l'état après un temps donné repassera à une distance arbitrairement proche de  $x$ . Ce temps est appelé *temps de récurrence de Poincaré*. Ainsi, une conséquence



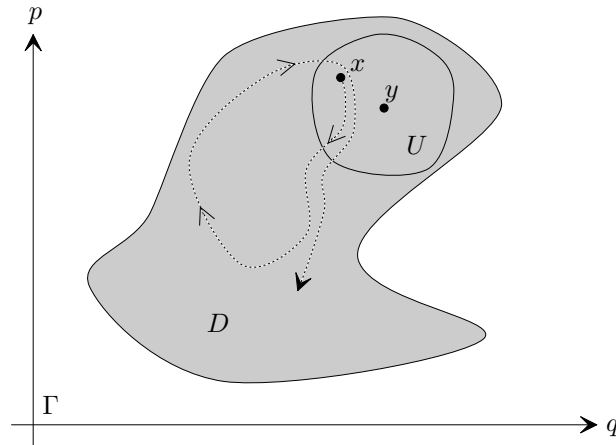


FIG. 3.4 – Le théorème de récurrence de Poincaré.

du théorème de Poincaré est que pour un système conservatif tout point matériel en mouvement repassera un nombre infini de fois arbitrairement proche de son point de départ. Un exemple est le cas du mouvement d'une particule dans un potentiel confinant  $U(x, y)$  (cf. Fig. 3.5).

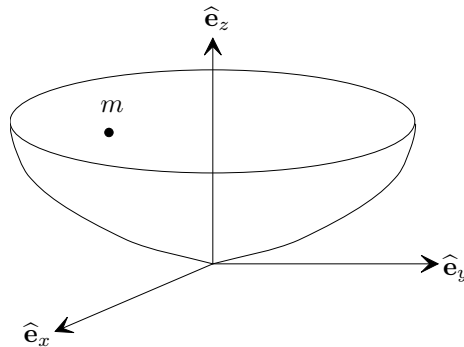


FIG. 3.5 – Particule dans un potentiel confinant.

Il faut de plus supposer que le potentiel va vers l'infini sur un contour borné  $y(x)$  et que l'énergie totale du système  $E$  reste constante. Alors la particule est confinée dans une cuvette définie par le potentiel, et repasse arbitrairement proche de tout point un nombre infini de fois si ce point fait partie d'un domaine invariant sous le flot hamiltonien.

Le théorème de Poincaré stipule que le voisinage  $U$  n'est pas réduit à un point. Ceci est important car sinon le théorème impliquerait l'existence d'un mouvement périodique, ce qui n'est en général pas le cas. Prenons l'exemple d'un mouvement sur la surface d'un tore dans  $\mathbb{R}^3$  (deux degrés de liberté), avec fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Si  $\omega_1/\omega_2$  est irrationnel, alors le mouvement n'est pas périodique bien que cette dynamique soit hamiltonienne et conservative. Nous passons à présent à la preuve du théorème de Poincaré.

**Preuve:** soit  $U_\tau = \phi_\tau U$  l'image de  $U$  par le flot hamiltonien après le temps  $\tau > 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $U_{n\tau} = \phi_{n\tau} U$ . Par le théorème de Liouville tous les  $U_{n\tau}$  ont le même volume. Or comme  $U \subseteq D$  et que la mesure de  $D$  est par hypothèse finie, alors la mesure de  $U$  est

aussi finie, donc celle de  $U_{n\tau}$  aussi. Ainsi, comme  $U$  est un domaine invariant par le flot, il existe  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k > l \geq 0$ , tels que  $U_{k\tau} \cap U_{l\tau} \neq \emptyset$ . En effet, si cela n'était pas le cas, alors la mesure de  $D$  serait infinie. Comme le volume de l'espace des phases est préservé par le flot hamiltonien, alors

$$\emptyset \neq \phi_\tau^{-1}(U_{k\tau} \cap U_{l\tau}). \quad (3.61)$$

De plus, par unicité des lignes de flot, qui ne se recoupent donc pas dans l'espace des phases, on a :

$$\phi_\tau^{-1}(U_{k\tau} \cap U_{l\tau}) = (\phi_\tau^{-1}U_{k\tau}) \cap (\phi_\tau^{-1}U_{l\tau}). \quad (3.62)$$

On peut se convaincre de l'Eq. (3.62) comme suit. Supposons que cette relation ne soit pas vraie et que l'intersection de  $\phi_\tau^{-1}U_{k\tau}$  avec  $\phi_\tau^{-1}U_{l\tau}$  soit nulle. Alors si l'Eq. (3.61) est satisfaite, cela signifie que certaines lignes de flot issues de  $\phi_\tau^{-1}U_{k\tau}$  et  $\phi_\tau^{-1}U_{l\tau}$  doivent s'intersecter pour aboutir dans  $U_{k\tau} \cap U_{l\tau}$ . Or ceci est en contradiction avec la propriété d'unicité des solutions dans le formalisme hamiltonien, d'où l'Eq. (3.62). Une démonstration plus formelle de l'Eq. (3.62) est la suivante. Soit la décomposition en ensembles disjoints (cf. Fig. 3.6) :

$$U_{k\tau} = V_{k\tau} \cup W_{k\tau}, \quad (3.63)$$

$$U_{l\tau} = V_{l\tau} \cup W_{l\tau}, \quad (3.64)$$

telle que

$$U_{k\tau} \cap U_{l\tau} = W_{k\tau} = W_{l\tau}. \quad (3.65)$$

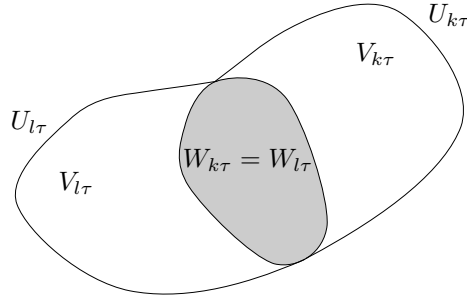


FIG. 3.6 – Preuve du théorème de Poincaré : décomposition en ensembles disjoints.

On a donc :

$$\phi_\tau^{-1}U_{k\tau} \stackrel{(3.63)}{=} \phi_\tau^{-1}(V_{k\tau} \cup W_{k\tau}) = \phi_\tau^{-1}V_{k\tau} \cup \phi_\tau^{-1}W_{k\tau} \quad (3.66)$$

$$\phi_\tau^{-1}U_{l\tau} \stackrel{(3.64)}{=} \phi_\tau^{-1}(V_{l\tau} \cup W_{l\tau}) = \phi_\tau^{-1}V_{l\tau} \cup \phi_\tau^{-1}W_{l\tau}. \quad (3.67)$$

Les Eqs. (3.66) et (3.67) sont une conséquence de l'unicité des solutions : si  $V_{k\tau}$  et  $W_{k\tau}$  sont disjoints en un temps donné, ils le sont en tout temps. Ainsi :

$$\begin{aligned} \phi_\tau^{-1}U_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}U_{l\tau} &\stackrel{(3.66)}{\stackrel{(3.67)}{=}} (\phi_\tau^{-1}V_{k\tau} \cup \phi_\tau^{-1}W_{k\tau}) \cap (\phi_\tau^{-1}V_{l\tau} \cup \phi_\tau^{-1}W_{l\tau}) \\ &= (\phi_\tau^{-1}V_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}V_{l\tau}) \cup (\phi_\tau^{-1}V_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}W_{l\tau}) \\ &\quad \cup (\phi_\tau^{-1}W_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}V_{l\tau}) \cup (\phi_\tau^{-1}W_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}W_{l\tau}). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Or comme les lignes de flot ne s'intersectent pas dans l'espace des phases, alors

$$\phi_\tau^{-1}V_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}V_{l\tau} = \emptyset. \quad (3.69)$$

En effet, si l'Eq. (3.69) n'était pas vraie cela voudrait dire qu'il existe  $x \in V_{k\tau}$  et  $y \in V_{l\tau}$  issus du même point au pas de temps précédent, ce qui est en contradiction avec l'unicité. Ce résultat est donc une propriété de toutes les paires de sous-ensembles disjoints de  $D$ . En particulier, ceci mène à :

$$\phi_\tau^{-1}V_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}W_{l\tau} = \emptyset, \quad (3.70)$$

$$\phi_\tau^{-1}W_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}V_{l\tau} = \emptyset. \quad (3.71)$$

En insérant les Eqs. (3.69) à (3.71) dans (3.68) il vient

$$\phi_\tau^{-1}U_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}U_{l\tau} = \phi_\tau^{-1}W_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}W_{l\tau} \stackrel{(3.65)}{=} \phi_\tau^{-1}W_{k\tau} \stackrel{(3.65)}{=} \phi_\tau^{-1}(U_{k\tau} \cap U_{l\tau}), \quad (3.72)$$

ce qui prouve l'Eq. (3.62). Les Eqs. (3.61) et (3.62) donnent :

$$\emptyset \neq \phi_\tau^{-1}U_{k\tau} \cap \phi_\tau^{-1}U_{l\tau} = U_{(k-1)\tau} \cap U_{(l-1)\tau}. \quad (3.73)$$

Soit  $n = k - l > 0$ , alors en itérant  $l$  fois le processus on obtient

$$\emptyset \neq U_{n\tau} \cap U. \quad (3.74)$$

L'intersection étant non vide, on sait donc qu'il existe  $z \in U_{n\tau} \cap U$ . Alors  $z \in U_{n\tau}$  aussi, et par conséquent il existe  $x \in U$  tel que  $z = \phi_{n\tau}(x)$  car  $U_{n\tau}$  est l'image de  $U$  après  $n\tau$  (cf. Fig. 3.7).

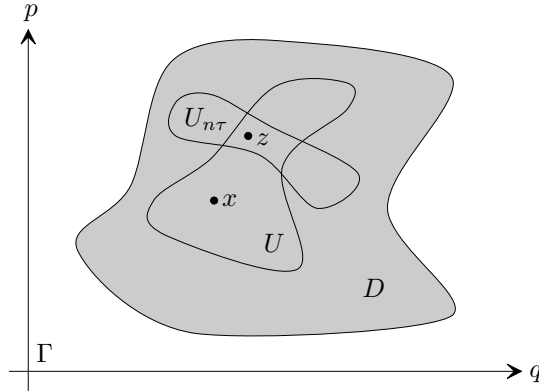


FIG. 3.7 – Preuve du théorème de Poincaré : résultat final.

Nous avons ainsi trouvé  $x \in U$  qui retourne dans  $U$  après un certain temps pour tout  $U$ , ce qui achève la preuve. ■

Quels sont en pratique les ordres de grandeur du temps de récurrence de Poincaré ? Considérons un gaz initialement confiné dans un seul compartiment d'un système formé de deux réservoirs séparés par une valve (cf. Fig. 3.8).

En  $t = 0$  on ouvre la valve, permettant au gaz d'occuper le compartiment de droite. L'expérience montre qu'après un certain temps la densité macroscopique de gaz est la même dans les deux récipients. Pourtant, ce système doit a priori obéir au théorème de Poincaré. Donc après un temps donné le gaz devrait se trouver à nouveau dans le compartiment de gauche et laisser celui de droite vide. La raison de cette contradiction apparente est que le temps de récurrence de Poincaré est très grand. Une estimation montre que pour  $1 \text{ cm}^3$  de gaz aux conditions normales, le temps de récurrence est plusieurs fois l'âge de l'univers.

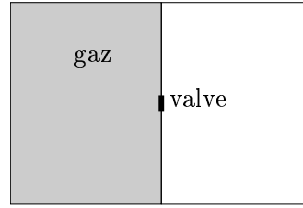


FIG. 3.8 – Théorème de Poincaré pour un gaz.

Le temps de récurrence peut être calculé pour certains systèmes simples (intégrables, périodiques). C'est par exemple le cas d'une chaîne de  $N$  oscillateurs harmoniques couplés (cf. Fig. 3.9).

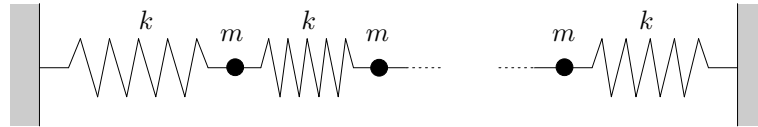


FIG. 3.9 – Théorème de Poincaré pour une chaîne d'oscillateurs harmoniques.

Soit  $m$  la masse des particules,  $k$  la constante de rappel des ressorts, alors on peut montrer que le temps de récurrence  $\tau$  est donné par

$$\tau \simeq 2\sqrt{\frac{k}{m}}(N+1), \quad (3.75)$$

qui diverge linéairement avec le nombre de ressorts  $n$ . Cette situation est vraie si tous les modes propres ont des fréquences reliées entre elles par des fractions rationnelles.  $\tau$  est alors proportionnel à l'inverse de la fréquence la plus basse. Dans des cas plus généraux,  $\tau$  croît exponentiellement avec le nombre de degrés de liberté. En effet, considérons un gaz formé de  $N$  particules dans un volume de mesure  $V$ . Décrivons la position de chaque particule de ce gaz au temps  $t$  par la donnée de sa position  $\mathbf{q}$  et de son impulsion  $\mathbf{p}$ . Combien d'états différents à  $n$  particules sont alors possibles? Considérons uniquement les positions, non pas les moments conjugués. Ainsi, pour distinguer si deux positions sont différentes, il est nécessaire de discrétiser l'espace en cellules de la taille typique des particules. Le nombre d'états différents possibles pour une particule  $M_1(V)$  sera alors de l'ordre du volume, c'est-à-dire  $M_1(V) \sim V$ . Le nombre d'états pour  $N$  particules est donc

$$M_N(V) \sim V^N. \quad (3.76)$$

Supposons qu'au temps initial  $t = 0$  toutes les particules se trouvent dans une partie de mesure  $v = \alpha V$  du volume  $V$ ,  $\alpha < 1$ . Le nombre d'états initiaux est alors

$$m_N(v) \sim v^N. \quad (3.77)$$

Laissons alors le gaz évoluer à partir de la condition initiale, et supposons qu'après un régime transitoire tous les  $M_N(V)$  états du système soient visités de manière équiprobable (hypothèse ergodique). La probabilité de retrouver le système dans l'état initial sera alors

$$p(v) = \frac{m_N(v)}{M_N(V)} \sim \alpha^N, \quad (3.78)$$

et le temps qu'il faut attendre pour retrouver cet état est

$$\tau(v) \sim \tau_0 p(V)^{-1}, \quad (3.79)$$

où  $\tau_0$  est un temps caractéristique pour que le gaz passe d'une configuration à une autre. Utilisant l'Eq. (3.78), le temps de récurrence  $\tau(v)$  montre bien une dépendance exponentielle dans le nombre de particules :

$$\tau(v) \sim \tau_0 \alpha^{-N} = \tau_0 \exp(-N \ln \alpha) = \tau_0 \exp(N \ln \alpha^{-1}). \quad (3.80)$$

Par exemple, si  $\alpha = 1/2$  et le nombre de particules est de l'ordre de grandeur d'une mole  $N \sim 10^{23}$ , alors en utilisant  $\tau_0 \sim 10^{-12}$  [s] (temps nécessaire pour parcourir  $10 \text{ \AA}$  à  $1'000$  [m/s]) on obtient  $\tau(v) \sim 10^{-12} 2^{10^{23}}$  [s]  $> 10^{10^{22}}$  [s]. Par comparaison, l'âge de l'univers est évalué à environ  $10^{18}$  [s].

Il faut néanmoins être conscient de la *fragilité des conditions* du théorème [12]. En effet, une des hypothèses est que le flot laisse le volume invariant. Par conséquent si le système n'est pas strictement conservatif, le théorème n'est plus valable.

Ces considérations ont une grande importance dans la discussion des concepts de réversibilité et d'irréversibilité en mécanique statistique [10].

## 3.4 Les transformations canoniques

### 3.4.1 Généralités

Nous avons vu que les équations de Lagrange étaient invariantes sous une transformation des coordonnées définie par un difféomorphisme (Sect. 2.5.1). Dans le formalisme hamiltonien, les variables  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  sont considérées indépendantes. Par conséquent, une transformation des coordonnées dans ce formalisme offre plus de liberté dans le sens où les coordonnées  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  peuvent être mélangées. Soit la transformation donnée par un difféomorphisme

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad i = 1, \dots, l \quad (3.81a)$$

$$P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.81b)$$

Sous une telle transformation, l'hamiltonien  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  devient  $\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ . En général, lors d'un tel changement de coordonnées la forme des équations canoniques est modifiée. Il est donc intéressant d'étudier une classe particulière de telles transformations, les *transformations canoniques*.

**Définition 3.5** Soit  $\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  l'hamiltonien dans les nouvelles variables, alors le changement de variables (3.81) est une **transformation canonique** si la structure des équations canoniques est préservée :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, l \quad (3.82)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.83)$$

Ainsi, plusieurs questions se posent :

- i) Peut-on énoncer des critères de canonicité, c'est-à-dire décider si une transformation donnée est canonique ?
- ii) Quelle est la forme de  $\tilde{H}$  ?
- iii) Comment générer des transformations canoniques ?

Nous répondons à ces questions dans les sections qui suivent.

### 3.4.2 Critères de canonicité

Nous formulerons quatre critères de canonicité.

#### 3.4.2.1 La structure symplectique des équations canoniques

Soit  $\mathbf{Y} = (q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l) \in \mathbb{R}^{2l}$ , soit la matrice par blocs

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_l \\ -\mathbb{1}_l & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

où  $\mathbb{1}_l$  est la matrice unité de dimension  $l$ , alors on peut écrire les équations canoniques (3.2) sous la forme

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J} \cdot \text{grad } H(\mathbf{Y}, t). \quad (3.85)$$

On vérifie facilement que la matrice  $\mathbf{J}$  ainsi définie est orthogonale<sup>1</sup>, et que  $\mathbf{J}^t = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$ ,  $\det \mathbf{J} = +1$ .

**Définition 3.6** On définit le *groupe des matrices réelles symplectiques de dimension  $2l$  par<sup>2</sup>*

$$S_p(2l, \mathbb{R}) = \{ \mathbf{M} = \{M_{ij}\}_{i,j=1}^{2l} \mid \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{J} \}. \quad (3.86)$$

**Lemme 3.7** Soit la transformation  $\mathbf{Z} = \phi(\mathbf{Y}, t)$  définie par le difféomorphisme  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{2l})$ , alors la transformation est canonique si et seulement si la matrice jacobienne du difféomorphisme est symplectique :

$$(D\phi) = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial Y_j} \right\}_{i,j=1}^{2l} \in S_p(2l, \mathbb{R}). \quad (3.87)$$

Ceci est le premier critère de canonicité.

**Preuve:** réalisons la preuve dans le cas d'une transformation autonome  $\mathbf{Z} = \phi(\mathbf{Y})$ . La preuve peut néanmoins aussi être généralisée pour une transformation qui dépend explicitement du temps. Comme la transformation ne dépend pas explicitement du temps, alors (cf. Eq. (3.152))

$$\tilde{H}(\mathbf{Z}, t) = H(\mathbf{Y}(\mathbf{Z}), t), \quad (3.88)$$

<sup>1</sup>Soit  $\mathbf{A}$  une matrice carrée de dimension  $n \times n$ , alors  $\mathbf{A}$  est orthogonale si  $\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbb{1}_n$ , autrement dit si  $\mathbf{A}$  est inversible et si  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$ .

<sup>2</sup> $S_p(2l, \mathbb{R})$  est un groupe de Lies, cf. annexe A.7.

et il faut montrer que  $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J} \cdot \text{grad } \tilde{H}(\mathbf{Z}, t)$  :

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{2l} \frac{\partial Z_i}{\partial Y_j} \frac{dY_j}{dt} \\
&\stackrel{(3.85)}{=} \sum_{j=1}^{2l} \frac{\partial Z_i}{\partial Y_j} \sum_{\mu=1}^{2l} J_{j\mu} \frac{\partial H(\mathbf{Y}, t)}{\partial Y_\mu} \\
&\stackrel{(3.88)}{=} \sum_{j=1}^{2l} \frac{\partial Z_i}{\partial Y_j} \sum_{\mu=1}^{2l} J_{j\mu} \frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{Z}(\mathbf{Y}), t)}{\partial Y_\mu} \\
&= \sum_{j=1}^{2l} \frac{\partial Z_i}{\partial Y_j} \sum_{\mu=1}^{2l} J_{j\mu} \sum_{\nu=1}^{2l} \frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{Z}, t)}{\partial Z_\nu} \frac{\partial Z_\nu}{\partial Y_\mu} \\
&= \sum_{\nu=1}^{2l} \underbrace{\left( \sum_{j,\mu=1}^{2l} \frac{\partial Z_i}{\partial Y_j} J_{j\mu} \frac{\partial Z_\nu}{\partial Y_\mu} \right)}_{\doteq K_{i\nu}} \frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{Z}, t)}{\partial Z_\nu}. \tag{3.89}
\end{aligned}$$

Soit  $(D\phi)$  la matrice jacobienne définie par l'Eq. (3.87), alors on constate que

$$K_{i\nu} = \sum_{j,\mu=1}^{2l} (D\phi)_{ij} J_{j\mu} (D\phi)_{\nu\mu} = \{(D\phi) \cdot \mathbf{J} \cdot (D\phi)^t\}_{i\nu}. \tag{3.90}$$

(3.90) dans (3.89) donne

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathbf{K} \cdot \nabla \tilde{H}(\mathbf{Z}, t). \tag{3.91}$$

Ainsi, la structure des équations canoniques données par l'Eq. (3.91) est identique à (3.85) si et seulement si

$$\mathbf{K} = (D\phi) \cdot \mathbf{J} \cdot (D\phi)^t = \mathbf{J}, \tag{3.92}$$

c'est-à-dire si et seulement si  $(D\phi)^t \in S_p(2l, \mathbb{R})$ , et donc si et seulement si  $(D\phi) \in S_p(2l, \mathbb{R})$ . ■

Remarquons que les matrices symplectiques formant un groupe, alors la composition de deux transformations canoniques est encore canonique. De plus, la formulation symplectique permet de conclure que les crochets de Poisson forment une *algèbre de Lie* (cf. annexe A.7).

### 3.4.2.2 Jacobien

**Lemme 3.8** *Soit la transformation  $\mathbf{Z} = \phi(\mathbf{Y}, t)$ ,  $\mathbf{Y} = (q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$ , alors la transformation est canonique si et seulement si le jacobien  $\tilde{\mathbb{J}}$  est égal à l'unité :*

$$\tilde{\mathbb{J}} = |\det(D\phi)| = 1. \tag{3.93}$$

Ceci est le second critère de canonicité.

**Preuve:** supposons  $(D\phi)$  symplectique, donc  $\phi$  définit une transformation canonique. Dans ce cas

$$\det [(D\phi)^t \cdot \mathbf{J} \cdot (D\phi)] = \det(\mathbf{J}) = 1, \tag{3.94}$$

et utilisant  $\det \mathbf{A}^t = \det \mathbf{A}$  ainsi que  $\det (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$  pour toutes matrices carrées  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , on obtient

$$\det [(D\phi)^t \cdot \mathbf{J} \cdot (D\phi)] = \det [(D\phi)^t] \underbrace{\det(\mathbf{J})}_{=1} \det(D\phi) = (\det(D\phi))^2. \quad (3.95)$$

Egalant les Eqs. (3.94) et (3.95) on obtient  $\det(D\phi) = \pm 1$ , d'où  $\tilde{\mathbb{J}} = 1$ .

Réciproquement, supposons que  $\tilde{\mathbb{J}} = 1$ . Alors par le théorème de Liouville la transformation préserve le volume de l'espace des phases et donc possède les mêmes propriétés essentielles sur l'espace des phases que la transformation engendrée par le flot. Le flot étant une transformation symplectique (cf. exemple ii, Sect. 3.4.2.5), alors  $\phi$  est canonique. ■

### 3.4.2.3 Différentielle totale

Comme nous le montrons dans l'annexe A.6, il est possible de formuler le principe de Hamilton sur l'espace des phases  $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ . On parle alors de *principe de Hamilton modifié* :

$$\delta S[\mathbf{q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \delta S[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) = 0, \quad (3.96)$$

les écarts vérifiant  $\eta_{q_i}(t_1) = \eta_{q_i}(t_2) = 0 \forall i = 1, \dots, l$ . Supposons avoir une transformation canonique  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . Alors comme par définition la structure des équations canoniques ne change pas, le principe de Hamilton modifié dans les nouvelles variables doit garder la même forme :

$$\delta \tilde{S}[\mathbf{Q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \delta \tilde{S}[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{i=1}^l P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right) = 0, \quad (3.97)$$

les écarts vérifiant  $\eta_{Q_i}(t_1) = \eta_{Q_i}(t_2) = 0 \forall i = 1, \dots, l$ . On montre que si les Eqs. (3.96) et (3.97) sont satisfaites simultanément alors

$$S[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \tilde{S}[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad (3.98)$$

où  $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  est une fonction dérivable arbitraire à valeurs réelles (on appelle  $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  la *fonction génératrice de première espèce*, cf. Sect. 3.4.3). En effet, dans ce cas on a

$$\delta S[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \delta S[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] + \delta S_1(\mathbf{q}(t_2), \mathbf{Q}(t_2), t_2) - \delta S_1(\mathbf{q}(t_1), \mathbf{Q}(t_1), t_1), \quad (3.99)$$

avec

$$\delta S_1(\mathbf{q}(t_k), \mathbf{Q}(t_k), t_k) = \frac{d}{d\lambda} S_1(\mathbf{q}(t_k) + \underbrace{\lambda \boldsymbol{\eta}_q(t_k)}_{=0}, \mathbf{Q}(t_k) + \underbrace{\lambda \boldsymbol{\eta}_Q(t_k)}_{=0}, t_k) \Big|_{\lambda=0} \quad (3.100)$$

$$= \frac{d}{d\lambda} S_1(\mathbf{q}(t_k), \mathbf{Q}(t_k), t_k) \quad (3.101)$$

$$= 0, \quad k = 1, 2. \quad (3.102)$$

En effet, les écarts  $\boldsymbol{\eta}_q(t_k)$  et  $\boldsymbol{\eta}_Q(t_k)$  à la solution  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{Q}$  sont nuls aux temps  $t_k$ ,  $k = 1, 2$ . (3.102) dans (3.99) permet donc d'affirmer que les actions (3.96) et (3.97) sont simultanément extrémalisées si elles sont reliées par (3.98). On a donc avec l'intégrant de (3.98) :

$$\sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^l P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{d}{dt} S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t). \quad (3.103)$$



Réarrangeant les termes et multipliant par  $dt$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l (p_i dq_i - P_i dQ_i) &= \left[ H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right] dt + dS_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \\ &= \left[ H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t} \right] dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial Q_i} dQ_i \right). \end{aligned} \quad (3.104)$$

D'autre part, l'Eq. (3.103) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \sum_{i=1}^l (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) + \left[ \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right], \quad (3.105)$$

et la dérivée totale de  $S_1$  par rapport au temps donne :

$$\frac{d}{dt} S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t}. \quad (3.106)$$

L'identification des Eqs. (3.105) et (3.106) mène en particulier à la relation

$$\frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t} = \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \quad (3.107)$$

que l'on insère dans (3.104) pour obtenir

$$\sum_{i=1}^l (p_i dq_i - P_i dQ_i) = \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial Q_i} dQ_i \right). \quad (3.108)$$

Comme vu dans l'annexe A.1, la condition nécessaire et suffisante pour que le membre de droite de (3.108) soit une différentielle totale est bien satisfaite. En effet, prenant  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{2l}) = (q_1, \dots, q_l, Q_1, \dots, Q_l)$ , alors (3.108) devient

$$\sum_{i=1}^l (p_i dq_i - P_i dQ_i) = \sum_{i=1}^{2l} A_i dy_i, \quad (3.109)$$

où

$$A_i = \frac{\partial S_1(\mathbf{y}, t)}{\partial y_i}. \quad (3.110)$$

Ainsi la condition pour avoir une différentielle totale

$$\frac{\partial A_i}{\partial y_j} = \frac{\partial A_j}{\partial y_i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, 2l, \quad (3.111)$$

s'écrit

$$\frac{\partial^2 S_1(\mathbf{y}, t)}{\partial y_j \partial y_i} = \frac{\partial^2 S_1(\mathbf{y}, t)}{\partial y_i \partial y_j}, \quad \forall i, j = 1, \dots, 2l, \quad (3.112)$$

ce qui est bien le cas pour  $S_1$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Le membre de droite de l'Eq. (3.108) étant donc une différentielle totale, ceci signifie que

$$\sum_{i=1}^l (p_i dq_i - P_i dQ_i) = d\psi(q, Q) \quad (3.113)$$

pour une fonction  $\psi$ . Ceci mène au critère de canonicité suivant.

**Lemme 3.9** Une condition nécessaire et suffisante pour que la transformation  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  soit canonique est que

$$\sum_{i=1}^l (p_i dq_i - P_i dQ_i) \quad (3.114)$$

soit une différentielle exacte.

Ceci est le troisième critère de canonicité.

### 3.4.2.4 Crochets de Lagrange

**Lemme 3.10** Soit  $r_i \in \{q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l\}$ , soit la transformation  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , soient les crochets de Lagrange définis par

$$[r_i, r_j]_L = \sum_{k=1}^l \left( \frac{\partial Q_k}{\partial r_i} \frac{\partial P_k}{\partial r_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial r_j} \frac{\partial P_k}{\partial r_i} \right), \quad (3.115)$$

alors la transformation est canonique si et seulement si

$$[q_i, q_j]_L = [p_i, p_j]_L = 0, \quad (3.116)$$

$$[q_i, p_j]_L = \delta_{ij}. \quad (3.117)$$

Ceci est le quatrième critère de canonicité.

**Preuve:** réalisons la preuve dans le cas d'une transformation autonome  $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . La preuve peut néanmoins être généralisée au cas d'une transformation qui dépend explicitement du temps. Le lemme 3.9 affirme que la transformation  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  est canonique si

$$\sum_{i=1}^l (p_i dq_i - P_i dQ_i) \quad (3.118)$$

est une différentielle exacte. On rappelle ainsi (cf. annexe A.1) que l'expression

$$dg = \sum_{i=1}^l A_i(x_1, \dots, x_n) dx_i, \quad (3.119)$$

est une différentielle totale si

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, l. \quad (3.120)$$

Comme  $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , alors

$$dQ_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^l \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} dp_j. \quad (3.121)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^l p_i dq_i - \sum_{i=1}^l P_i dQ_i &\stackrel{(3.121)}{=} \sum_{i=1}^l p_i dq_i - \sum_{i=1}^l P_i \left( \sum_{j=1}^l \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^l \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} dp_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^l \underbrace{\left( p_i - \sum_{j=1}^l P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right)}_{\doteq A_i} dq_i - \sum_{i=1}^l \underbrace{\sum_{j=1}^l P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}}_{\doteq -B_i} dp_i \\
&= \sum_{i=1}^l (A_i dq_i + B_i dp_i). \tag{3.122}
\end{aligned}$$

Les conditions à vérifier pour que l'on ait une forme différentielle exacte (donc une transformation canonique) sont

$$\frac{\partial A_j}{\partial q_i} = \frac{\partial A_i}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, \dots, l, \tag{3.123}$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial p_i} = \frac{\partial B_i}{\partial p_j}, \quad i, j = 1, \dots, l, \tag{3.124}$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial q_i} = \frac{\partial A_i}{\partial p_j}, \quad i, j = 1, \dots, l. \tag{3.125}$$

En insérant les définitions de  $A_i$  et  $B_i$  dans les Eqs. (3.123) à (3.125), les conditions s'écrivent :

$$-\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^l P_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_j \partial q_i} = -\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^l P_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i \partial q_j}, \tag{3.126}$$

$$-\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \sum_{k=1}^l P_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial p_j \partial p_i} = -\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \sum_{k=1}^l P_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial p_i \partial p_j}, \tag{3.127}$$

$$-\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \sum_{k=1}^l P_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i \partial p_j} = \delta_{ij} - \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^l P_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_j \partial p_i}, \tag{3.128}$$

$$\tag{3.129}$$

ce qui donne après simplifications

$$0 = -\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = [q_j, q_i]_L \tag{3.130}$$

$$0 = -\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = [p_j, p_i]_L \tag{3.131}$$

$$0 = -\sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - \delta_{ij} = [q_i, p_j]_L - \delta_{ij}. \tag{3.132}$$

On en tire donc les relations (3.116) et (3.117) si et seulement si la transformation est canonique, ce qui achève la preuve dans le cas autonome. ■

### 3.4.2.5 Exemples de transformations canoniques

- i) Une transformation linéaire  $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Z} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}$  définie par une matrice carrée réelle  $\mathbf{M}$  de dimension  $2l \times 2l$  est canonique si et seulement si  $\mathbf{M} \in S_p(2l, \mathbb{R})$  (ou  $|\det \mathbf{M}| = 1$ ).

En effet,  $\phi(\mathbf{Y}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}$ , et

$$(D\phi)_{ij} = \frac{\partial}{\partial Y_j} \sum_{k=1}^l M_{ik} Y_k = \sum_{k=1}^l M_{ik} \delta_{kj} = M_{ij}. \quad (3.133)$$

ii) La transformation  $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Z} = \phi(\mathbf{Y})$  définie par le flot  $\phi$  d'un système hamiltonien est symplectique. En effet, la forme des équations canoniques restant la même pour tout temps, on en conclut que la transformation induite par le flot hamiltonien est canonique. On parle alors de la *structure symplectique des équations canoniques*. Dans ce cas on a  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0$  qui sont les conditions initiales, et  $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}(t)$ .

iii) La transformation dans laquelle les rôles des  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  sont échangés (au signe près) est canonique :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \pm \mathbb{1}_l \\ \mp \mathbb{1}_l & 0 \end{pmatrix}}_{=\pm \mathbf{J}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (3.134)$$

En effet,  $\pm \mathbf{J} \in S_p(2l, \mathbb{R})$  car

$$(\pm \mathbf{J})^t \cdot \mathbf{J} \cdot (\pm \mathbf{J}) = \underbrace{\mathbf{J}^t}_{=-\mathbf{J}} \cdot \underbrace{\mathbf{J}^2}_{=-\mathbb{1}_l} = \mathbf{J}. \quad (3.135)$$

On voit donc à nouveau l'existence d'une symétrie entre les variables  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  dans le formalisme hamiltonien.

iv) Une *transformation de Galilée* est canonique. Soit  $\mathbf{R}$  une matrice de rotation dans  $\mathbb{R}^l$ , soit  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l) \in \mathbb{R}^l$  un vecteur quelconque,  $m \in \mathbb{R}$  un scalaire, alors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{v}t \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{p} + m\mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (3.136)$$

On constate facilement que

$$(D\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix}. \quad (3.137)$$

Il est alors facile de vérifier la symplecticité  $(D\phi)^t \cdot \mathbf{J} \cdot (D\phi) = \mathbf{J}$  en utilisant la propriété d'orthogonalité  $\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} = \mathbb{1}$  des matrices de rotation. On peut aussi utiliser l'identité générale

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \det(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \quad (3.138)$$

pour des matrices carrées  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Comme le déterminant d'une matrice de rotation est égal à  $\pm 1$ , alors en appliquant (3.138) à (3.137) il vient immédiatement  $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}$ .

v) Une *transformation de jauge* est canonique. Soit  $f(\mathbf{q}, t)$  une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.139)$$

La matrice jacobienne du difféomorphisme est

$$(D\phi) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_l & \mathbb{0} \\ \mathbf{B} & \mathbb{1}_l \end{pmatrix}, \quad (3.140)$$

où  $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^l$  est une matrice symétrique d'éléments

$$b_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} = b_{ji}. \quad (3.141)$$

A nouveau, il est facile de vérifier la symplecticité  $(D\phi)^t \cdot \mathbf{J} \cdot (D\phi) = \mathbf{J}$  utilisant la propriété de symétrie  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^t$ .

vi) Une transformation autonome issue d'un changement de coordonnées de position généralisée définissant un difféomorphisme est canonique. Dans ce cas on a

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}), \quad (3.142)$$

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (3.143)$$

Pour trouver de quelle manière se transforment les  $p_i$ , il faut revenir au formalisme lagrangien. Soit

$$\bar{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}), t), \quad (3.144)$$

alors sachant que la forme des équations de Lagrange est invariante sous un tel difféomorphisme (cf. Sect. 2.5.1) il vient

$$P_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\partial \bar{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^l \overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}^{=p_j} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{\stackrel{(2.93)}{=} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}} = \sum_{j=1}^l p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}. \quad (3.145)$$

Or comme  $Q_i = Q_i(\mathbf{q})$  est un difféomorphisme, on peut inverser la relation pour trouver  $q_i = q_i(\mathbf{Q})$ . On exprime ainsi  $\partial q_j / \partial Q_i$  en fonction de  $\mathbf{q}$  dans (3.145). La transformation s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ P_i \end{pmatrix} = \phi_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} Q_i(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}_i}(\mathbf{Q}) \end{pmatrix}. \quad (3.146)$$

A nouveau, on vérifie que  $(D\phi)$  est symplectique.

vii) Soit la transformation

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctg(q/p) \\ \frac{p^2 + q^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.147)$$

Alors

$$pdq - PdQ \stackrel{(3.147)}{=} pdq - \frac{p^2 + q^2}{2} \frac{pdq - qdp}{p^2 + q^2} = d\left(\frac{1}{2}pq\right). \quad (3.148)$$

Il s'agit donc d'une différentielle totale, et par conséquent la transformation (3.147) est canonique. De plus, de l'Eq. (3.147) on a  $\tg Q = q/p$ , d'où  $p = q \ctg Q$  et donc l'intégration de la forme différentielle donne

$$\psi(q, Q) \stackrel{(3.148)}{=} \frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}q^2 \ctg Q. \quad (3.149)$$

### 3.4.3 Les fonctions génératrices

Nous désirons trouver explicitement les fonctions qui engendrent des transformations canoniques. Ces fonctions sont appelées *fonctions génératrices*. De plus, nous désirons établir la forme du nouvel hamiltonien  $\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  en terme de ces fonctions génératrices et de  $H$ .

### 3.4.3.1 Fonction génératrice de première espèce

Reprenons le raisonnement de la Sect. 3.4.2.3 jusqu'à l'Eq. (3.106). L'identification des Eqs. (3.105) et (3.106) mène aux relations

$$p_i = \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.150)$$

$$P_i = -\frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.151)$$

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t}. \quad (3.152)$$

$S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  est appelée *fonction génératrice de première espèce*.

Quelle est l'interprétation des Eqs. (3.150) à (3.152) ? Etant donné un changement de variables  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , alors ce changement de variables sera canonique s'il existe une fonction  $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  telle que  $p_i = \partial S_1 / \partial q_i$  et  $P_i = -\partial S_1 / \partial Q_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Si  $S_1$  existe, alors le nouvel hamiltonien est donné par  $\tilde{H} = H + \partial S_1 / \partial t$ . Ainsi la structure des équations canoniques dans les nouvelles variables  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$  est conservée :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, & i = 1, \dots, l \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, & i = 1, \dots, l, \\ \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) &= H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial}{\partial t} S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t). \end{aligned}} \quad (3.153)$$

Les Eqs. (3.153) font intervenir uniquement les nouvelles variables. Par conséquent, il faut exprimer  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  et  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ . Pour ceci, on considère d'abord la relation

$$P_i = -\frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial Q_i} \quad (3.154)$$

que l'on inverse pour obtenir  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ , puis substitue dans

$$p_i = \frac{\partial S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial q_i} \quad (3.155)$$

pour extraire  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ . Ces relations connues, il est possible d'exprimer le nouvel hamiltonien  $\tilde{H}$  en fonction des nouvelles variables  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$ . D'autre part, pour obtenir l'expression de la transformation canonique, il est aussi nécessaire d'inverser

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \\ \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \end{pmatrix}, \quad (3.156)$$

pour trouver la forme explicite de la transformation canonique

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.157)$$

Par le théorème des fonctions implicites, ceci est possible si le déterminant de la matrice hessienne de  $S_1$  est non nul :

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial q_i \partial Q_j} \right\} \neq 0. \quad (3.158)$$

## 3.4.3.2 Fonction génératrice de seconde espèce

Pour pouvoir générer une transformation canonique, la fonction génératrice doit dépendre des anciennes variables ainsi que des nouvelles variables. Sous cette condition, le nombre total de variables est  $4l + 1$  (ce sont  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$ , et  $t$ ). Or une transformation est définie par la donne des  $2l$  équations  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Il reste donc  $2l + 1$  variables indépendantes dont la fonction génératrice peut dépendre, donc d'autres choix que  $(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ . On peut donc considérer d'autres fonctions génératrices, comme par exemple  $S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ . Mais comme de l'Eq. (3.154) on a  $P_i = -\partial S_1 / \partial Q_i$ , alors  $S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  est reliée à  $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  par une transformation de Legendre (cf. annexe A.5). Ainsi, la construction des autres fonctions se fait à l'aide de la transformée de Legendre.

**Définition 3.7** Soit  $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  la fonction génératrice de première espèce, alors on définit la **fonction génératrice de seconde espèce** par la transformée de Legendre de  $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  par rapport à  $\mathbf{Q}$  :

$$\begin{aligned} S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) &= (\mathcal{L}S_1)(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = - \sum_{i=1}^l Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial Q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), t)}_{\stackrel{(3.151)}{=} -P_i} + S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), t) \\ &= \sum_{i=1}^l Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) P_i + S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), t). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Dans le membre de droite de l'Eq. (3.159),  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  signifie  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t)$ . De plus, pour que  $S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  définisse une transformation canonique, il faut que le déterminant de la hessienne de  $S_2$  soit non nul :

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial q_i \partial P_j} \right\} \neq 0. \quad (3.160)$$

**Lemme 3.11** Soit  $S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  une fonction génératrice de seconde espèce, alors

$$Q_i = \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.161)$$

$$p_i = \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.162)$$

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial t}. \quad (3.163)$$

**Preuve:** par vérification directe, on a :

$$\frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i} \stackrel{(3.159)}{=} \sum_{j=1}^l P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} + \sum_{j=1}^l Q_j \underbrace{\frac{\partial P_j}{\partial P_i}}_{= \delta_{ij}} + \sum_{j=1}^l \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial Q_j}}_{\stackrel{(3.153)}{=} -P_j} \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} = Q_i, \quad (3.164)$$

$$\frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial q_i} \stackrel{(3.159)}{=} \sum_{j=1}^l P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^l Q_j \underbrace{\frac{\partial P_j}{\partial q_i}}_{= 0} + \sum_{j=1}^l \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial Q_j}}_{\stackrel{(3.153)}{=} -P_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial q_i}}_{\stackrel{(3.153)}{=} p_i} = p_i, \quad (3.165)$$

$$\frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial t} \stackrel{(3.159)}{=} \sum_{j=1}^l P_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^l \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial Q_j}}_{\stackrel{(3.153)}{=} -P_j} \frac{\partial Q_j}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial t}}_{\stackrel{(3.153)}{=} \tilde{H} - H} = \tilde{H} - H. \quad (3.166)$$

■

A nouveau, à partir de l'Eq. (3.161) on exprime  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ , que l'on insère dans l'Eq. (3.162) pour obtenir  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ . Ceci permet d'exprimer le nouvel hamiltonien  $\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  en fonction des nouvelles variables. Sous la condition (3.160), la relation est inversible ce qui permet d'établir explicitement l'expression de la transformation canonique  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ .

### 3.4.3.3 Fonction génératrice de troisième espèce

**Définition 3.8** Soit  $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  la fonction génératrice de première espèce, alors on définit la **fonction génératrice de troisième espèce** par la transformée de Legendre de  $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  par rapport à  $\mathbf{q}$  :

$$\begin{aligned} S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) &= (\mathcal{L}S_1)(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = - \sum_{i=1}^l q_i(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial q_i}(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{Q}, t)}_{\stackrel{(3.150)}{=} p_i} + S_1(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{Q}, t) \\ &= - \sum_{i=1}^l q_i(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) p_i + S_1(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{Q}, t). \end{aligned} \quad (3.167)$$

Dans le membre de droite de l'Eq. (3.167),  $\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$  signifie  $\mathbf{q}(\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{Q}, t)$ . De plus, pour que  $S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$  définisse une transformation canonique, il faut que le déterminant de la hessienne de  $S_3$  soit non nul :

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)}{\partial p_i \partial Q_j} \right\} \neq 0. \quad (3.168)$$

**Lemme 3.12** Soit  $S_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  une fonction génératrice de troisième espèce, alors

$$q_i = - \frac{\partial S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.169)$$

$$P_i = - \frac{\partial S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.170)$$

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t}. \quad (3.171)$$

**Preuve:** la preuve est en tout point similaire à celle de la fonction génératrice de seconde espèce. ■

### 3.4.3.4 Fonction génératrice de quatrième espèce

**Définition 3.9** Soit  $S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  la fonction génératrice de seconde espèce, alors on définit la **fonction génératrice de quatrième espèce** par la transformée de Legendre de



$S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  par rapport à  $\mathbf{q}$  :

$$\begin{aligned} S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = (\mathcal{L}S_2)(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) &= - \sum_{i=1}^l q_i(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) \underbrace{\frac{\partial S_2}{\partial q_i}(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \mathbf{P}, t)}_{\stackrel{(3.162)}{=} p_i} + S_2(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \mathbf{P}, t) \\ &= - \sum_{i=1}^l q_i(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) p_i + S_2(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \mathbf{P}, t). \end{aligned} \quad (3.172)$$

Dans le membre de droite de l'Eq. (3.172),  $\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$  signifie  $\mathbf{q}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P}, t)$ . De plus, pour que  $S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$  définisse une transformation canonique, il faut que le déterminant de la hessienne de  $S_4$  soit non nul :

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)}{\partial p_i \partial P_j} \right\} \neq 0. \quad (3.173)$$

**Lemme 3.13** Soit  $S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$  une fonction génératrice de quatrième espèce, alors

$$Q_i = \frac{\partial S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.174)$$

$$q_i = - \frac{\partial S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.175)$$

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)}{\partial t}. \quad (3.176)$$

**Preuve:** la preuve est en tout point similaire à celle de la fonction génératrice de seconde espèce. ■

### 3.4.3.5 Récapitulatif

Le tableau suivant récapitule les relations satisfaites par les différentes fonctions génératrices.

	$q_i$	$p_i$	$Q_i$	$P_i$
$S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$		$\frac{\partial S_1}{\partial q_i}$		$-\frac{\partial S_1}{\partial Q_i}$
$S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$		$\frac{\partial S_2}{\partial q_i}$	$\frac{\partial S_2}{\partial P_i}$	
$S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$	$-\frac{\partial S_3}{\partial p_i}$			$-\frac{\partial S_3}{\partial Q_i}$
$S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$	$-\frac{\partial S_4}{\partial p_i}$		$\frac{\partial S_4}{\partial P_i}$	

### 3.4.3.6 Exemples

i) Soit

$$S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \sum_{k=1}^l q_k Q_k, \quad (3.177)$$

vérifiant

$$\frac{\partial^2 S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial q_i \partial Q_j} = \delta_{ij}. \quad (3.178)$$

$S_1$  ainsi défini est donc bien une fonction génératrice de première espèce.

$$P_i = -\frac{\partial S_1}{\partial Q_i} = -\sum_{j=1}^l q_k \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} = -q_i, \quad (3.179)$$

$$p_i = \frac{\partial S_1}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial q_i} Q_j = Q_i. \quad (3.180)$$

La transformation canonique issue de  $S_1$  s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ -\mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (3.181)$$

Il s'agit de l'échange des rôles de  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$ . Le nouvel hamiltonien est donné par

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t). \quad (3.182)$$

Par définition de la transformation canonique, la forme des équations de Hamilton reste invariante dans les nouvelles variables. Remarquons que cette même transformation peut être aussi engendrée par la fonction génératrice de quatrième espèce

$$S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}) = \sum_{j=1}^l p_k P_k. \quad (3.183)$$

ii) Soit

$$S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_{j=1}^l q_k P_k. \quad (3.184)$$

La transformation canonique issue de cette définition de  $S_2$  est

$$p_i = \frac{\partial S_2}{\partial q_i} = P_i \quad (3.185)$$

$$Q_i = \frac{\partial S_2}{\partial P_i} = q_i. \quad (3.186)$$

Il s'agit donc de la transformation identité. Notons qu'elle est aussi engendrée par la fonction génératrice de troisième espèce

$$S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) = -\sum_{j=1}^l p_k Q_k. \quad (3.187)$$

iii) Soit l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique à une dimension

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2, \quad (3.188)$$

où  $m$  est la masse et  $\omega$  la pulsation. A l'aide d'une transformation canonique judicieuse il est possible d'obtenir une nouvelle variable qui soit cyclique dans le nouvel hamiltonien  $\tilde{H}$ . Ceci permettra de résoudre entièrement le problème. Soit la fonction génératrice de première espèce

$$S_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{ctg}(Q), \quad (q, Q) \in \mathcal{D} = \{\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)\}. \quad (3.189)$$

La condition

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial Q} = -\frac{m\omega q}{\sin^2 Q} \neq 0 \quad (3.190)$$

est bien vérifiée dans  $\mathcal{D}$ . Par définition :

$$P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q}, \quad (3.191)$$

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q, \quad (3.192)$$

ce qui fournit

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad (3.193)$$

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (3.194)$$

Le nouvel hamiltonien est :

$$\tilde{H}(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \omega P. \quad (3.195)$$

On en déduit que  $Q$  est une variable cyclique pour  $\tilde{H}$ , donc son moment conjugué est une constante du mouvement. La transformation étant canonique, la structure des équations canoniques dans les nouvelles variables est préservée :

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega, \quad (3.196)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0. \quad (3.197)$$

La solution des équations canoniques est alors

$$Q(t) = \omega t + \varphi, \quad (3.198)$$

$$P = P_0 = \text{cte}|_t, \quad (3.199)$$

que l'on exprime dans les anciennes variables à l'aide des Eqs. (3.193) et (3.194) :

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.200)$$

$$p(t) = \sqrt{2m\omega P_0} \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.201)$$

Il a donc été possible de trouver les solutions des équations du mouvement de l'oscillateur harmonique en une dimension grâce à une transformation canonique judicieuse.

Quelle est l'interprétation de  $P_0$  ? Comme  $\partial H / \partial t = 0$  et que l'énergie cinétique est une forme quadratique homogène en  $p$ , alors  $H = E$  est l'énergie totale du système. En substituant les Eqs. (3.200) et (3.201) dans (3.188) il vient :

$$E = \omega P_0, \quad (3.202)$$

d'où  $P_0 = E/\omega$  qui a les dimensions d'une action. On constate que la dynamique dans les variables  $Q$  et  $P$  a lieu sur un cercle de rayon  $P_0$ , avec fréquence de rotation  $\omega/2\pi$ . On dit alors que  $Q$  est la *variable angle*, tandis que  $P$  est la *variable action* (cf. Sect. 3.6.5). En effet, du point de vue des unités,  $P_0$  a les dimensions d'une énergie divisée par une fréquence, c'est-à-dire [(kg m/s)m] ce qui correspond à une action.

### 3.5 Systèmes intégrables et non-intégrables

Considérons un système hamiltonien à  $l$  degrés de liberté. Pour un ensemble de conditions initiales données, il est toujours possible, tout au moins en principe, d'intégrer les  $2l$  équations de Hamilton pour trouver la trajectoire du point représentatif du système dans l'espace des phases  $\Gamma$ . L'intégration peut être effectuée analytiquement dans les cas simples et numériquement autrement. Il faut néanmoins réaliser que l'intégration numérique peut poser de très gros problèmes liés à la précision, à la convergence et aux instabilités possibles du schéma numérique utilisé.

Deux cas se présentent :

- i) Les solutions sont "régulières". L'évolution du système n'est pas sensible aux conditions initiales dans le sens où des conditions initiales voisines conduisent à des trajectoires voisines. Ceci est le cas par exemple du pendule rigide ; toutes les trajectoires sont caractérisées par leur énergie  $E$ . En fonction de celle-ci, les trajectoires sont périodiques fermées ou périodiques ouvertes (cf. Fig. 3.10) et de petites différences d'énergie conduisent à de petits écarts entre trajectoires.
- ii) Les solutions sont "chaotiques". L'évolution du système est très *sensible aux conditions initiales*, c'est-à-dire que des conditions initiales légèrement différentes conduisent à un éloignement exponentiel des trajectoires. Bien que l'évolution soit déterministe, le comportement de tels systèmes est en pratique imprévisible car il est impossible de déterminer les conditions initiales avec suffisamment de précision. Un tel exemple est fourni par le pendule double. Le comportement du système apparaît comme chaotique et on parle du *chaos déterministe* [13].

Les systèmes appartenant à la première classe sont dits intégrables alors que ceux appartenant à la seconde classe sont dits non-intégrables. Il est évidemment important de déterminer les conditions sous lesquelles un système est intégrable. Une discussion détaillée de ces questions dépasse le cadre de ce cours introductif et nous ne ferons qu'énoncer et illustrer les résultats (voir [14] pour plus de détails).

**Théorème 3.3** *Un système à  $l$  degrés de liberté est intégrable si :*

- i) *il existe  $l$  intégrales premières (constantes du mouvement)  $I_i$ ,*
- ii) *ces intégrales premières sont indépendantes,*
- iii) *elles sont en involution.*

La recherche des intégrales premières peut se faire en exploitant les propriétés de symétrie du système. La théorie de Hamilton-Jacobi qui suit permet aussi de trouver les intégrales premières.

L'indépendance des intégrales premières assure que chacune d'elles apporte une information supplémentaire. Ainsi l'intersection des surfaces  $I_i = \text{cte}$  forme un sous espace de dimension  $l$  de l'espace des phases  $\Gamma$ . L'indépendance est vérifiée si les  $l$  gradients des  $I_i$  sont indépendants en tout point de la surface  $\{I_i = f_i\}_{i=1}^l$ , où  $f_i$  sont des constantes [14].

Les  $I_i$  sont dites en *involution* si leurs crochets de Poisson vérifient

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad \forall i, j \leq l. \quad (3.203)$$

Il y a donc  $l(l-1)/2$  conditions à satisfaire, ce qui pour  $l > 2$  est plus contraignant que l'existence de  $l$  intégrales premières.

Nous voyons donc que tout système autonome à 1 degré de liberté est intégrable. Pour  $l > 1$ , les systèmes intégrables sont l'exception plutôt que la règle. Un système *inté-grable* est tel que la construction de la solution ne requiert que des opérations algébriques (inversion de fonctions) et des quadratures (calcul d'intégrales connues).

**Exemple:** Considérons un système invariant par rotation pour lequel le moment angulaire  $\mathbf{L}$  est conservé. Les composantes ne sont pas en involution car  $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$  (où  $\varepsilon_{ijk}$  est le symbole d'antisymétrie, cf. Eq. (5.39)). Ainsi, parmi les 3 composantes du moment angulaire qui sont conservées, seules deux d'entre elles sont en involution. Généralement on choisit  $L^2$  et  $L_z$ .  $\diamond$

## 3.6 La théorie de Hamilton-Jacobi

Les transformations canoniques peuvent aussi être utilisées pour déterminer systématiquement les intégrales premières d'un système hamiltonien. De façon similaire à l'exemple de l'oscillateur harmonique de la Sect. 3.4.3.6, on cherche avec la théorie de Hamilton-Jacobi de construire une transformation canonique vers des nouvelles variables qui sont des constantes dans le temps.

### 3.6.1 Le cas dépendant du temps

Considérons tout d'abord le cas où l'hamiltonien dépend explicitement du temps. L'idée de base est de chercher une transformation canonique

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad (3.204)$$

telle que les  $l$  nouvelles variables  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$  soient constantes. Il n'est pas possible que ces  $2l$  constantes soient toutes des constantes du mouvement. En effet, un système intégrable ne possède au plus que  $l$  intégrales premières en involution, mais la solution du système dépend également de  $l$  conditions initiales. Par exemple, dans le cas du pendule rigide, l'énergie est une intégrale première et il suffit de donner l'angle initial pour déterminer la trajectoire. Par contre les  $2l$  constantes peuvent être des constantes d'intégration des équations du mouvement comme par exemple des fonctions des valeurs initiales des variables  $q_k$  et  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, l$ .

On cherche donc une transformation canonique telle que :

$$\underbrace{\dot{Q}_i}_{=0} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.205)$$

$$\underbrace{\dot{P}_i}_{=0} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.206)$$

On en conclut que  $\tilde{H}$  est égal à une constante indépendante de  $Q_i$  et  $P_i$ , que l'on choisit égale à zéro (toutes les grandeurs d'intérêt étant ensuite définies par des dérivations partielles, on peut sans restriction de généralité imposer la nullité de cette constante) :

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = 0. \quad (3.207)$$

Il est d'usage dans la théorie de Hamilton-Jacobi de choisir une fonction génératrice de

seconde espèce pour décrire la transformation. Ainsi, par définition (cf. Sect. 3.4.3.2) :

$$Q_i = \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.208)$$

$$p_i = \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.209)$$

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial t} \stackrel{(3.207)}{=} 0. \quad (3.210)$$

En insérant les Eqs. (3.208) et (3.209) dans (3.210) on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\boxed{H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial t} = 0.} \quad (3.211)$$

Dans ce contexte, la fonction génératrice  $S_2$  est appelée *fonction principale de Hamilton*. La relation ci-dessus est une équation différentielle non-linéaire du premier ordre pour les  $l + 1$  variables  $q_1, \dots, q_l, t$ . L'intégration de l'Eq. (3.211) fait donc intervenir  $l + 1$  constantes d'intégration indépendantes, notées  $\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}$ . La solution s'écrit donc

$$S_2 = S_2(\mathbf{q}, \alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}, t). \quad (3.212)$$

On dit de l'Eq. (3.212) qu'il s'agit de la *solution complète*. Néanmoins, une des constantes d'intégration est non pertinente à la solution. En effet, l'Eq. (3.211) ne dépend de  $S_2$  que par des dérivées partielles. Par conséquent, si  $S_2$  est solution, alors  $S_2 + \gamma$  est aussi solution, où  $\gamma$  est une constante quelconque. Une des  $l + 1$  constantes de l'Eq. (3.212) doit donc apparaître comme constante additive. Mais toute constante additive n'a aucune influence sur le résultat final car les grandeurs s'obtiennent ensuite par dérivation partielle de la fonction principale. Ainsi, la solution (3.212) ne dépend effectivement que de  $l$  constantes. Notons  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ , alors :

$$S_2 = S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t). \quad (3.213)$$

La forme finale de l'équation de Hamilton-Jacobi se trouve en remplaçant l'Eq. (3.213) dans les Eqs. (3.208) à (3.210) :

$$\beta_i = \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.214)$$

$$p_i = \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.215)$$

où  $\beta_i$  est une constante s'obtenant simplement par évaluation du membre de droite de (3.214) au temps initial. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit finalement :

$$\boxed{H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} = 0.} \quad (3.216)$$

Nous avons donc construit l'équation pour la fonction génératrice de la transformation canonique vers les constantes  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.217)$$

où  $\boldsymbol{\beta}$  est déterminé par les valeurs de  $\boldsymbol{\alpha}$  selon l'Eq. (3.214).

Si l'on a trouvé la solution complète de l'équation de Hamilton-Jacobi, alors le problème est intégrable et les  $\alpha_i$  sont les intégrales premières [14].

Pratiquement, on résout d'abord l'équation de Hamilton-Jacobi (3.216), inverse (3.214) pour trouver  $q_i = q_i(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ , que l'on injecte dans (3.215) pour trouver  $p_i = p_i(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ .

**Remarques:**

- i) Le formalisme de Hamilton-Jacobi consiste en la reformulation d'un système de  $2l$  équations différentielles du premier ordre à  $2l + 1$  variables en une équation non-linéaire à  $l + 1$  dérivées partielles de premier ordre.
- ii) Retournons à la solution complète (3.213) et dérivons-la par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial S_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S_2}{\partial t}. \quad (3.218)$$

Utilisant les Eqs. (3.215) et (3.216), (3.218) devient :

$$\frac{d}{dt}S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \stackrel{\text{déf.}}{=} L(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (3.219)$$

d'où

$$S_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t ds L(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s) + \text{cte}|_t. \quad (3.220)$$

Ainsi la fonction génératrice de seconde espèce ne diffère que par une constante de l'intégrale du lagrangien. Néanmoins, cette manière de procéder n'est pas plus simple calculatoirement. En effet, il faudrait alors d'abord résoudre les équations de Lagrange pour exprimer  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$  et  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ . Le seul intérêt de cette relation est d'ordre historique [15].

◇

### 3.6.2 Le cas indépendant du temps

Soit un système à  $l$  degrés de liberté et soit un hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps :  $\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})/\partial t = 0$ . L'hamiltonien est alors une constante du mouvement  $H = E$  (qui n'est pas forcément l'énergie totale du système). Choisissons  $\alpha_1 = E$  et la forme de solution

$$S_2(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t) = W(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l) - Et, \quad (3.221)$$

alors l'équation de Hamilton-Jacobi (3.216) prend la forme

$$\boxed{H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial \mathbf{q}}\right) = E}, \quad (3.222)$$

et les Eqs. (3.214) et (3.215) deviennent :

$$\beta_1 = \frac{\partial W(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial E} - t, \quad (3.223)$$

$$\beta_i = \frac{\partial W(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial \alpha_i}, \quad i = 2, \dots, l, \quad (3.224)$$

$$p_i = \frac{\partial W(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.225)$$

(3.222) est appelée l'équation de Hamilton-Jacobi réduite.

### 3.6.2.1 L'exemple de l'oscillateur harmonique

Soit l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique unidimensionnel

$$H(q, p) = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2, \quad (3.226)$$

où  $m$  est la masse et  $\omega$  la pulsation. On a donc un degré de liberté  $l = 1$ . L'équation de Hamilton-Jacobi (3.216) s'écrit

$$H\left(q, \frac{\partial S_2(q, \alpha, t)}{\partial q}\right) + \frac{\partial S_2(q, \alpha, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.227)$$

Considérons alors une solution de la forme :

$$S_2(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t. \quad (3.228)$$

Comme discuté précédemment, nous posons  $\alpha = E$ . Insérant l'Eq. (3.228) dans (3.227) il vient

$$\frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q} = m\omega \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}, \quad (3.229)$$

dont la solution est

$$W(q, \alpha) = m\omega \int_0^q ds \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - s^2}, \quad W(0, \alpha) = 0. \quad (3.230)$$

Insérant (3.230) dans (3.228) on a

$$S_2(q, \alpha, t) = m\omega \int_0^q ds \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - s^2} - \alpha t. \quad (3.231)$$

On vérifie que

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial q \partial \alpha} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}} \neq 0, \quad (3.232)$$

donc  $S_2(q, \alpha, t)$  est une fonction génératrice de la transformation canonique

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.233)$$

Par définition

$$p \stackrel{(3.215)}{=} \frac{\partial S_2(q, \alpha, t)}{\partial q} \stackrel{(3.225)}{=} \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q} \stackrel{(3.231)}{=} m\omega \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}, \quad (3.234)$$

$$\beta \stackrel{(3.214)}{=} \frac{\partial S_2(q, \alpha, t)}{\partial \alpha} \stackrel{(3.223)}{=} \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial \alpha} - t \stackrel{(3.231)}{=} \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}q\right) - t. \quad (3.235)$$

L'inversion de (3.235) donne

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin(\omega(t + \beta)). \quad (3.236)$$

L'insertion de (3.236) dans (3.234) mène à

$$p(t) = \sqrt{2\alpha m} \cos(\omega(t + \beta)). \quad (3.237)$$



Il reste à connecter  $\alpha$  et  $\beta$  aux conditions initiales  $q_0$  et  $p_0$ . On a

$$\frac{q_0}{p_0} \stackrel{(3.236)}{\stackrel{(3.237)}{=}} \frac{1}{m\omega} \operatorname{tg}(\omega\beta), \quad (3.238)$$

d'où

$$\beta = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \left( \frac{m\omega q_0}{p_0} \right). \quad (3.239)$$

Nous savons par construction que  $\alpha = E$ . Vérifions-le à l'aide des Eqs. (3.236) et (3.237) :

$$q^2 \frac{m\omega^2}{2\alpha} + p^2 \frac{1}{2\alpha m} = 1, \quad (3.240)$$

d'où

$$\alpha = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_0^2 \stackrel{(3.226)}{=} E. \quad (3.241)$$

Nous avons ainsi entièrement résolu la dynamique de l'oscillateur harmonique unidimensionnel par la méthode de Hamilton-Jacobi.

Remarquons que la substitution des solutions (3.236) et (3.237) dans (3.231) donne

$$\begin{aligned} S(q, \alpha, t) &= m\omega \int_0^q ds \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sqrt{1 - \sin^2(\omega(s + \beta))} - \alpha t \\ &= \sqrt{2\alpha m} \int_0^q dq \cos(\omega(s + \beta)) - \alpha t. \end{aligned} \quad (3.242)$$

Utilisant

$$dq = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \cos(\omega(s + \beta)) ds \quad (3.243)$$

dans (3.242) il vient

$$S(q, \alpha, t) = 2\alpha \int_{t_0}^t ds \left( \cos^2(\omega(s + \beta)) - \frac{1}{2} \right). \quad (3.244)$$

D'autre part, le lagrangien est

$$\begin{aligned} L(q, p, s) &= \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} q^2 \\ &\stackrel{(3.236)}{\stackrel{(3.237)}{=}} \alpha \cos^2(\omega(s + \beta)) - \alpha \sin^2(\omega(s + \beta)) \\ &= 2\alpha \left( \cos^2(\omega(s + \beta)) - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.245)$$

Comparant les Eqs. (3.244) et (3.245) on voit que l'identité (3.220) est bien satisfaite. Néanmoins, cette relation n'a pu être obtenue qu'après résolution du problème.

### 3.6.3 Le cas séparable

La résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi est généralement difficile. Il existe néanmoins des cas où la situation se simplifie par le fait que le problème peut être découplé.

**Définition 3.10** Une coordonnée généralisée  $q_i$  est dite **séparable** si la fonction principale de Hamilton peut s'écrire sous la forme

$$S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = S_2^{(1)}(q_i, \boldsymbol{\alpha}, t) + S_2^{(2)}(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_l, \boldsymbol{\alpha}, t). \quad (3.246)$$

**Définition 3.11** *L'équation de Hamilton-Jacobi est dite **séparable** si toutes les coordonnées généralisées sont séparables, c'est-à-dire si*

$$S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = \sum_{i=1}^l S_2^{(i)}(q_i, \boldsymbol{\alpha}, t). \quad (3.247)$$

**Remarque:** les conditions assurant l'existence d'un problème séparable sont appelées *conditions de séparabilité de Staeckel* [15]. Dans le contexte de ce cours, il suffit de remarquer le cas particulier selon lequel si l'hamiltonien peut s'écrire sous la forme

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^l H_i(q_i, p_i, t), \quad (3.248)$$

alors le problème est séparable. En effet, dans ce cas en introduisant l'Eq. (3.248) dans la forme générale de l'Eq. de Hamilton-Jacobi (3.216) il vient

$$\sum_{i=1}^l H_i\left(q_i, \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} = 0, \quad (3.249)$$

expression dans laquelle on introduit la forme d'essai (3.247) pour obtenir

$$\sum_{i=1}^l H_i\left(q_i, \frac{\partial S_2(q_i, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial q_i}, t\right) + \sum_{i=1}^l \frac{\partial S_2^{(i)}(q_i, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.250)$$

Ceci mène aux équations de Hamilton-Jacobi de la forme

$$H_i\left(q_i, \frac{\partial S_2(q_i, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S_2^{(i)}(q_i, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} = \underbrace{Cte|_{q_i}}_{\doteq \alpha_i}, \quad (3.251)$$

pour  $i = 1, \dots, l$ . En pratique, le cas le plus intéressant est celui où l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps.  $\diamond$

**Lemme 3.14** *Soit un problème autonome séparable tel que l'hamiltonien s'exprime sous la forme d'une somme d'hamiltoniens découplés, alors la fonction principale est de la forme*

$$S_2(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t) = \sum_{i=2}^l W_i(q_i, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l) - Et, \quad (3.252)$$

et les équations de Hamilton-Jacobi réduites prennent la forme de  $l - 1$  équations différentielles ordinaires (dans les variables  $q_i$ ) :

$$\boxed{H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i(q_i, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial q_i}\right) = \alpha_i, \quad i = 2, \dots, l,} \quad (3.253)$$

où la  $l$ -ième relation est donnée par  $\alpha_1 = E = \sum_{i=2}^l \alpha_i = H$ , et

$$\beta_1 = \sum_{i=2}^l \frac{\partial W_i(q_i, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial E} - t, \quad (3.254)$$

$$\beta_i = \sum_{i=2}^l \frac{\partial W_i(q_i, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial \alpha_i}, \quad i = 2, \dots, l, \quad (3.255)$$

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.256)$$

**Preuve:** soit un hamiltonien autonome de la forme

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^l H_i(q_i, p_i). \quad (3.257)$$

Utilisant la forme d'essai (3.252), l'équation de Hamilton-Jacobi réduite (3.222) devient

$$\sum_{i=1}^l H_i \left( q_i, \frac{\partial W_i(q_i, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l)}{\partial q_i} \right) = E, \quad (3.258)$$

En passant successivement les termes dans le membre de droite de l'Eq. (3.258), il découle que chaque terme doit individuellement être égal à une certaine constante, que nous notons  $\alpha_i$ , ce qui mène aux Eqs. (3.253). On peut aussi réaliser la preuve directement à partir de (3.251), avec  $S^{(1)} = -Et$ , et  $S^{(i)} = W_i$  pour  $i = 2, \dots, l$ . ■

**Lemme 3.15** *Toute variable cyclique  $q_i$  est séparable, et la fonction principale s'écrit*

$$S_2(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t) = S(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_l, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t) + \gamma_i q_i, \quad (3.259)$$

où  $\gamma_i = p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  est le moment conjugué qui est une constante du mouvement,  $L$  étant le lagrangien du système.

**Preuve:** soit  $q_i$  une variable cyclique, alors le moment conjugué  $p_i$  est une constante du mouvement. Vérifions alors que  $q_i$  est une variable séparable avec la forme d'essai

$$S_2(\mathbf{q}, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t) = W(q_1, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t) + S(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_l, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t). \quad (3.260)$$

Par définition de la fonction génératrice de seconde espèce

$$p_i = \frac{\partial S_2(\mathbf{q}, \alpha, t)}{\partial q_i} \stackrel{(3.260)}{=} \frac{\partial W(q_1, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t)}{\partial q_i}. \quad (3.261)$$

Or  $p_i$  étant une constante du mouvement, notée  $\gamma_i$ , on peut intégrer l'Eq. (3.261) pour obtenir

$$W(q_i, E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t) = \gamma_i q_i + f(E, \alpha_2, \dots, \alpha_l, t). \quad (3.262)$$

Insérant (3.262) dans (3.260) et redéfinissant  $S$  du membre de droite de (3.260) par  $S \doteq S + f$ , on a bien  $W = \gamma_i q_i$  d'où la forme (3.259), ce qui achève la preuve. ■

Cette preuve enseigne donc que la forme d'essai issue de la cyclicité d'une variable est identique à celle réalisée pour  $E$ . En effet, si  $\partial H / \partial t = 0$  donc  $H = E$ , cela revient à dire que le temps est une variable cyclique, et la fonction principale est de la forme  $S_2 = W - Et$ .

Si l'hamiltonien n'est pas de la forme (3.248), il se peut que pour un choix approprié de coordonnées le problème devienne séparable. Il n'existe cependant pas de critère général pour savoir si une solution séparable est possible. Illustrons ce point par l'exemple de la section suivante.

### 3.6.3.1 L'exemple du potentiel central dans $\mathbb{R}^3$

Soit une particule ponctuelle de masse  $m$  se déplaçant dans  $\mathbb{R}^3$  sous l'action d'une force centrale. En coordonnées sphériques  $\{r, \theta, \varphi\}$  le potentiel est donc de la forme  $V = V(r)$ . L'hamiltonien s'écrit :

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r). \quad (3.263)$$

Le problème étant autonome, la fonction principale est de la forme

$$S_2(r, \theta, \varphi, E, \alpha_2, \alpha_3, t) = W(r, \theta, \varphi, E, \alpha_2, \alpha_3) - Et. \quad (3.264)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi réduite est ainsi

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + V(r) = E. \quad (3.265)$$

Même si l'Eq. (3.265) n'a pas la forme d'une somme d'hamiltoniens découplés, on peut vérifier que les conditions de séparabilité de Staeckel sont néanmoins satisfaites [15]. Dans le contexte de ce cours, il suffira de considérer la séparabilité comme une forme d'essai dont la pertinence sera vérifiée a posteriori :

$$W(r, \theta, \varphi, E, \alpha_2, \alpha_3) = W_r(r, E, \alpha_2, \alpha_3) + W_\theta(\theta, E, \alpha_2, \alpha_3) + W_\varphi(\varphi, E, \alpha_2, \alpha_3). \quad (3.266)$$

Substituant (3.266) dans (3.265) et multipliant le tout par  $2mr^2 \sin^2 \theta$  il vient

$$r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \underbrace{\left( \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2}_{(i)} + 2mr^2 \sin^2 \theta (V(r) - E) = 0. \quad (3.267)$$

On constate que le terme (i) ne dépend que de  $\varphi$ , tandis que les autres dépendent de  $r$  et  $\theta$ . Par conséquent

$$\left( \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 = \alpha_3^2, \quad (3.268)$$

où  $\alpha_3$  est une constante par rapport à  $r$  et  $\theta$ . Divisant l'Eq. (3.267) par  $\sin^2 \theta$  et y substituant (3.268) il vient

$$\underbrace{r^2 \left( \frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2}_{(ii)} + \left( \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \underbrace{2mr^2 (V(r) - E)}_{(iii)} + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (3.269)$$

Les termes (ii) et (iii) ne dépendant que de  $r$  et les autres que de  $\theta$  on en tire

$$r^2 \left( \frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + 2mr^2 (V(r) - E) = -\alpha_2^2, \quad (3.270)$$

$$\left( \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_2^2. \quad (3.271)$$

Le système d'Eqs. (3.268), (3.270), et (3.271) peut être résolu :

$$W_\varphi = \alpha_3 \varphi, \quad (3.272)$$

$$W_\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} dx \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 x}}, \quad (3.273)$$

$$W_r = \int_{r_0}^r dx \sqrt{2m(E - V(x)) - \frac{\alpha_2^2}{x^2}}. \quad (3.274)$$

La fonction principale de Hamilton (3.264) devient donc

$$S_2(r, \theta, \varphi, E, \alpha_2, \alpha_3, t) = \int_{r_0}^r dx \sqrt{2m(E - V(x)) - \frac{\alpha_2^2}{x^2}} + \int_{\theta_0}^{\theta} dx \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 x}} + \alpha_3 \varphi - Et. \quad (3.275)$$

Les équations du mouvement s'écrivent ainsi :

$$\beta_1 = \frac{\partial S_2}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t = m \int_{r_0}^r dx \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(x)) - \frac{\alpha_2^2}{x^2}}} - t, \quad (3.276)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= - \int_{r_0}^r dx \frac{\alpha_2}{x^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(x)) - \frac{\alpha_2^2}{x^2}}} \\ &+ \int_{\theta_0}^{\theta} dx \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 x}}}, \end{aligned} \quad (3.277)$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = - \int_{\theta_0}^{\theta} dx \frac{\alpha_3}{\sin^2 x} \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 x}}} + \varphi. \quad (3.278)$$

Les grandeurs  $r_0$  et  $\theta_0$  n'ont pas d'importance dans le sens où leur contribution à l'intégrale engendre une constante, ensuite absorbée dans  $\beta_i$ . L'Eq. (3.276) peut être résolue pour  $r$ . Connaissant l'évolution de  $r$ , (3.277) peut être résolue pour  $\theta$ . Finalement, connaissant l'évolution de  $r$  et  $\theta$ , (3.278) peut être résolue pour  $\varphi$ . Les constantes sont ensuite ajustées en fonction des conditions initiales, ce qui détermine la solution du problème. Les constantes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , et  $\alpha_3$  ont une interprétation physique claire.  $\alpha_1 = E$  est l'énergie totale du système.  $\alpha_3$  est la valeur conservée du moment angulaire autour de  $\hat{e}_3$  :

$$p_\varphi \stackrel{\text{d'éf.}}{=} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} \stackrel{(3.266)}{=} \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \stackrel{(3.268)}{=} \alpha_3. \quad (3.279)$$

Notons que le lemme 3.15 aurait directement permis d'établir  $W_\varphi = \alpha_3 \varphi$ , avec  $\alpha_3 = p_\varphi$ . Pour identifier  $\alpha_2$ , on constate que l'Eq. (3.271) peut être écrite sous la forme

$$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_2^2, \quad (3.280)$$

de façon à ce que l'hamiltonien s'écrive

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right) + V(r). \quad (3.281)$$

Il s'agit de la forme de l'hamiltonien d'un système à deux degrés de liberté (mouvement plan) en coordonnées polaires.  $\alpha_2$  est donc le module du moment cinétique total. Ainsi, le formalisme de Hamilton-Jacobi fait ressortir de façon explicite les lois de conservation :  $\alpha_1$  est l'énergie,  $\alpha_2$  le module du moment cinétique total, et  $\alpha_3$  la composante du moment angulaire total selon  $\hat{e}_3$ . La donne de ces trois grandeurs fixe alors univoquement la valeur des constantes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , et  $\beta_3$ . Ainsi le formalisme de Hamilton-Jacobi permet de retrouver les invariants qui sont reliés aux symétries naturelles du système.

Utilisant ce formalisme, on peut résoudre le problème de Kepler qui est défini par un potentiel central de la forme

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad \kappa > 0. \quad (3.282)$$

### 3.6.4 Limite classique de la description d'une particule quantique

Le formalisme de Hamilton-Jacobi permet de faire le lien entre les descriptions classique et quantique d'une particule soumise à une force dérivant d'un potentiel.

Considérons une particule ponctuelle classique de masse  $m$  en une dimension soumise au potentiel  $V(q, t)$ . L'hamiltonien est

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(q, t) \quad (3.283)$$

et l'équation de Hamilton-Jacobi correspondante s'écrit

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.284)$$

soit

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.285)$$

Si de plus le potentiel est indépendant du temps, on peut écrire

$$S(q, t) = W(q, E) - Et, \quad (3.286)$$

où  $E$  est l'énergie de la particule. Par transformation de Legendre inverse par rapport à l'énergie on obtient une équation implicite donnant la position  $q$  de la particule en fonction du temps  $t$  (cf. annexe A.5.1, où on identifie les Eqs. (A.61) et (3.286) avec  $x = E$ ,  $p = t$ ,  $\psi = S$ , et  $y = W$ ) :

$$t = \frac{\partial W(q, E)}{\partial E}. \quad (3.287)$$

Considérons maintenant le cas d'une particule quantique. Soit  $\Psi(q, t)$  la fonction d'onde. Le carré de la norme de  $\Psi$  donne la densité de probabilité de trouver la particule en  $q$  au temps  $t$ .  $\Psi(q, t)$  obéit à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(q, t)}{\partial q^2} + V(q, t)\Psi(q, t), \quad (3.288)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Ecrivons alors  $\Psi(q, t)$  sous la forme

$$\Psi(q, t) = \exp\left(\frac{iS(q, t)}{\hbar}\right). \quad (3.289)$$

En l'y substituant dans l'équation de Schrödinger, il vient pour la phase  $S$

$$\left[ \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + V(q, t) \right] \Psi = -\Psi \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.290)$$

Dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , dite limite classique, on a

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q, t) = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.291)$$

qui est l'équation de Hamilton-Jacobi du cas classique.

Comment comprendre ce résultat ? La solution générale de l'équation de Schrödinger est une superposition linéaire de fonctions d'onde d'énergie donnée. On parle de "paquet d'ondes", qui s'écrit comme

$$\Psi(q, t) = \int dE g(E) \exp\left(i \frac{W(q, E) - Et}{\hbar}\right), \quad (3.292)$$

où  $g(E)$  est un facteur de pondération. Pour la majeure partie des énergies, l'exponentielle dans l'intégrand oscille rapidement et ne contribue pas à l'intégrale. La contribution dominante proviendra de la valeur de l'énergie rendant stationnaire l'argument de l'exponentielle, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial E}(W(q, E) - Et) = 0, \quad (3.293)$$

soit

$$t = \frac{\partial W(q, E)}{\partial E}, \quad (3.294)$$

ce qui correspond au résultat classique donné par l'Eq. (3.287). En conclusion, la fonction décrivant le paquet d'onde ne prendra une valeur non négligeable que lorsque sa position  $q$  satisfait l'équation de mouvement classique. En d'autres termes, le paquet d'onde "suit" la trajectoire classique dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ .

### 3.6.5 Les variables angle-action

Le formalisme des variables angle-action s'inspire de certaines idées de la théorie de Hamilton-Jacobi. Ainsi, il existe d'autres transformations canoniques intéressantes telles que les nouvelles variables ne soient pas constantes au cours de l'évolution. Un mouvement particulièrement important en physique est le mouvement périodique. En effet, on est souvent intéressé à connaître la période, plus facile à établir, plutôt que les détails de la dynamique. Le formalisme angle-action va permettre de trouver les fréquences de tels mouvements, sans résoudre totalement le problème.

Les variables angle-action ont une portée plus générale que les systèmes périodiques intégrables. En effet, ce formalisme trouve ses applications les plus intéressantes pour des systèmes non périodiques (cf. Sect 3.6.5.4), non-intégrables (théorème KAM), ou sert de base pour la théorie des perturbations canoniques [15].

#### 3.6.5.1 Système à un degré de liberté

Soit un système conservatif à un degré de liberté  $q$ , soit l'hamiltonien  $H(q, p) = \alpha_1 = E$ . Ce système est intégrable et peut donc être résolu (de façon analytique ou en recourant à des quadratures). L'équation d'une *orbite* dans l'espace des phases est alors donnée par la solution paramétrique  $p = p(q, E)$ . Selon les valeurs de l'énergie, deux types d'orbites *périodiques* peuvent se présenter : une *orbite fermée* ou une *orbite ouverte* (cf. Fig. 3.10).

Dans le cas d'une orbite fermée, les variables  $\{q, p\}$  repassent périodiquement en un point représentatif. Par contre, le cas d'une orbite ouverte se présente si  $p$  est une fonction périodique de  $q$  de période  $q_0$ . Dans ce dernier cas la valeur de  $q$  peut croître indéfiniment.

**Exemple:** soit le pendule plan rigide de la Fig. 2.8. Son énergie est alors donnée par

$$E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta. \quad (3.295)$$

De l'Eq. (3.295) on tire

$$p_\theta = \pm \sqrt{\frac{2l}{g} \left( \frac{E}{mgl} + \cos \theta \right)}, \quad (3.296)$$

définissant ainsi les orbites dans l'espace des phases  $p_\theta = p_\theta(\theta, E)$  pour chaque valeur de l'énergie  $E$ .

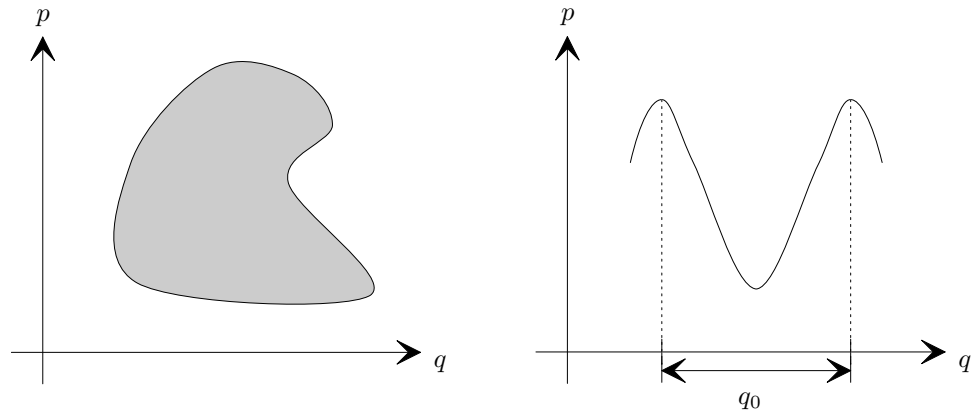


FIG. 3.10 – Orbites périodiques fermée (gauche) et ouverte (droite).

- i) Si  $E > mgl$ , alors  $E/(mgl) + \cos \theta > 0$  pour tout  $\theta$ . Le pendule a donc assez d'énergie pour effectuer des tours complets,  $\theta \in [0, 2\pi[$ . L'orbite périodique est donc ouverte.
- ii) Si  $E < mgl$ , alors il existe  $\theta^* < 2\pi$  tel que  $E/(mgl) + \cos \theta^* = 0$ . Donc  $\theta < \theta^*$  et l'orbite périodique est fermée.
- ii) Si  $E = mgl$ , alors cette valeur correspond à une *bifurcation* entre les orbites fermées et ouvertes.

La Fig. 3.11 représente différentes orbites du pendule pour  $2l/g = 1$ .

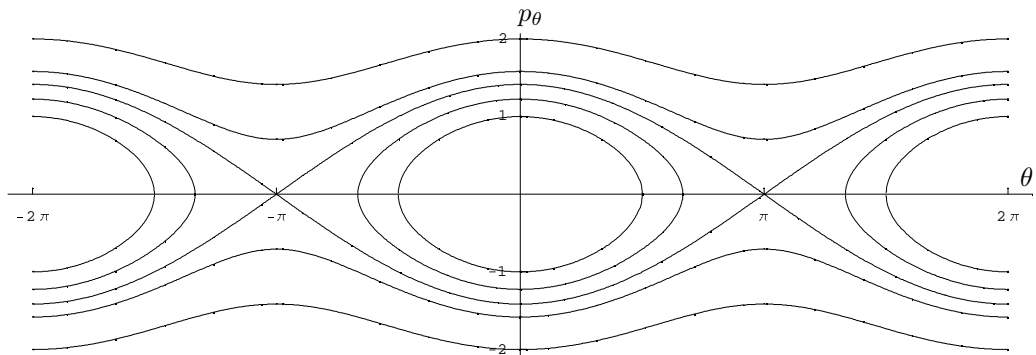


FIG. 3.11 – Orbites dans l'espace des phases du pendule.

◇

Dans les deux cas d'orbites possibles, introduisons une nouvelle variable  $J$  qui va remplacer  $\alpha_1$  dans le rôle de la nouvelle impulsion *constante*. Nous désirons construire la transformation canonique

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ J \end{pmatrix}, \quad (3.297)$$

où  $J$  est la *variable d'action* définie par

$$J = \oint dq p(q). \quad (3.298)$$



$J$  est donc la surface d'une période complète dans l'espace des phases. Si l'orbite est ouverte, alors il suffit d'intégrer sur une période  $q_0$  (cf. Fig. 3.10). Le système étant conservatif, par définition  $J$  est constante (théorème de Liouville). Dans l'Eq. (3.298),  $\varphi$  est la *variable d'angle*. La transformation cherchée étant canonique, la structure des équations canoniques est préservée :

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J}, \quad (3.299)$$

$$j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}. \quad (3.300)$$

Or comme  $J$  est une constante, alors  $\partial \tilde{H} / \partial \varphi = 0$ , d'où  $\tilde{H} = \tilde{H}(J)$  ne dépend que des actions. Ainsi  $\tilde{H}(J)$  est aussi une constante par rapport au temps, et par conséquent il en est de même du membre de droite l'Eq. (3.299). Cette dernière équation peut donc être intégrée, fournissant :

$$\varphi(t) = \nu t + \varphi(0), \quad (3.301)$$

où  $\nu = \nu(J) = \partial \tilde{H}(J) / \partial J$ . En résumé :

$$J = J_0, \quad (3.302)$$

$$\varphi(t) = \nu t + \varphi_0, \quad (3.303)$$

où  $J_0 = J(0)$  et  $\varphi_0 = \varphi(0)$ . Nous concluons donc que la dynamique du système dans les variables angle-action est un mouvement périodique de fréquence  $\nu$  localisé sur le périmètre d'un cercle de rayon constant  $J$ . En effet, nous savons que le mouvement est périodique, donc il doit en être de même dans les nouvelles variables. Comme  $J$  est une constante, alors  $\nu$  définit la fréquence du mouvement. A titre instructif, il est possible de le vérifier explicitement a posteriori. La variation de l'angle sur une période est

$$\Delta\varphi = \oint dq \frac{\partial \varphi}{\partial q}. \quad (3.304)$$

D'autre part, le système étant conservatif la fonction génératrice peut s'écrire

$$S_2(q, J, t) = W(q, J) - Et, \quad (3.305)$$

et alors par définition de la fonction génératrice de seconde espèce

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial J}. \quad (3.306)$$

Insérant l'Eq. (3.306) dans (3.304) il vient

$$\Delta\varphi = \oint dq \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} \stackrel{(3.302)}{=} \frac{d}{dJ} \oint dq \frac{\partial W}{\partial q} \stackrel{(3.225)}{=} \frac{d}{dJ} \underbrace{\oint dq p(q)}_{\stackrel{(3.298)}{=} J} = 1. \quad (3.307)$$

Si  $\tau$  est la période pour un cycle complet de la variable  $q$ , alors

$$\Delta\varphi = \varphi(\tau) - \varphi_0 \stackrel{(3.303)}{=} \nu\tau \stackrel{(3.307)}{=} 1, \quad (3.308)$$

d'où  $\nu = \tau^{-1}$  est la fréquence.

La fréquence du mouvement périodique est ainsi obtenue sans résoudre totalement le problème. La difficulté se ramène donc à trouver l'hamiltonien du système en fonction de

la variable action  $J$ . En pratique on peut néanmoins souvent exprimer  $J$  en fonction de  $E$ , ce qui par inversion donne  $H(J)$ .

**Exemple:** soit l'oscillateur harmonique unidimensionnel dont l'hamiltonien est

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2. \quad (3.309)$$

Les orbites dans l'espace des phases sont données par

$$p(q) = \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2}kq^2 \right)}. \quad (3.310)$$

La variable action est par définition

$$J = \oint dq p(q) \stackrel{(3.310)}{=} \oint dq \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2}kq^2 \right)}, \quad (3.311)$$

ce qui se calcule facilement à l'aide du changement de variables  $q = \sqrt{2E/k} \sin \theta$  :

$$J = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.312)$$

L'Eq. (3.312) donne l'aire de la surface dans l'espace des phases qui est enfermée dans l'orbite d'une période d'énergie  $E$ . On en tire l'hamiltonien en fonction de  $J$  :

$$E(J) = \tilde{H}(J) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}} J. \quad (3.313)$$

La fréquence s'obtient avec

$$\nu = \frac{\partial \tilde{H}(J)}{\partial J} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (3.314)$$

ce qui est le résultat connu pour l'oscillateur harmonique.  $\diamond$

### 3.6.5.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Soit un système conservatif intégrable à  $l$  degrés de liberté, alors l'orbite dans l'espace des phases est définie par les  $l$  relations  $p_i = p_i(\mathbf{q})$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Supposons de plus le système périodique dans chaque variable  $q_i$ . Notons que si le mouvement restreint à chaque plan  $\{q_i, p_i\}$  est périodique, le système n'est pas forcément périodique dans l'espace des phases entier. En effet, il suffit que le rapport de deux périodes soit irrationnel pour qu'il n'existe plus de période commune à ces deux orbites.

L'idée de la généralisation est similaire, soit trouver une transformation canonique

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}. \quad (3.315)$$

La transformation étant canonique, la structure des équations de Hamilton est préservée :

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_i}, \quad \forall i = 1, \dots, l, \quad (3.316)$$

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi_i}, \quad \forall i = 1, \dots, l. \quad (3.317)$$

A nouveau, nous désirons construire une transformation vers des actions  $J_i$  constantes définies par

$$J_i = \oint dq_i p_i(q_i), \quad (3.318)$$

où l'intégration est réalisée sur une période dans le plan  $\{q_i, p_i\}$ . Les actions  $J_i$  étant constantes, les Eqs. (3.317) donnent  $J_i = J_i(0)$  et l'intégration explicite de l'Eq. (3.316) est possible. En résumé :

$$J_i = J_i(0), \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.319)$$

$$\varphi_i(t) = \nu_i t + \varphi_i(0), \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.320)$$

avec

$$\nu_i = \frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial J_i}. \quad (3.321)$$

Le mouvement est donc localisé sur la surface de dimension  $l$  du tore défini par les rayons constants  $J_i$ . Les fréquences de rotation autour de chaque rayon  $J_i$  sont données par  $\nu_i$ .

De façon générale, les systèmes intégrables sans propriété particulière de périodicité peuvent être décrits en termes de variables angle-action (théorème de Liouville-Arnold, Sect. 3.6.5.4).

Cette approche basée sur les variables angle-action a joué un rôle historique important en mécanique quantique, où il fut constaté que les valeurs de  $J_i$  n'étaient pas arbitraires, mais quantifiées par un multiple de  $h/(2\pi)$ , où  $h$  est la constante de Planck.

### 3.6.5.3 Application à l'atome de Bohr

Un atome possède un noyau de charge  $Ze$  autour duquel tournent des électrons de charge  $-e$  et de masse  $m$ . L'électron est soumis à une force centrale  $\mathbf{F} = -Ze^2\mathbf{r}/r^3$ , où  $\mathbf{r}$  est la position de l'électron relative au noyau (le centre de masse est ici supposé en bonne approximation sur le noyau, ce qui n'est néanmoins pas une restriction de généralité car le problème peut être reformulé en termes formellement équivalents dans le centre de masse). Il s'agit d'une description classique du système, par opposition à la description quantique. Dans la théorie de Bohr-Sommerfeld, on postule que les intégrales des actions sont des multiples entiers de la constante de Planck  $h$  :

$$J_r = \oint dr p_r = n_1 h, \quad (3.322)$$

$$J_\theta = \oint d\theta p_\theta = n_2 h, \quad (3.323)$$

où  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  et  $r, \theta$  sont les coordonnées polaires. Ceci revient à dire que les électrons ne peuvent emprunter que des trajectoires bien définies. Utilisant le formalisme angle-action, on obtient les énergies discrètes :

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}, \quad (3.324)$$

où  $n = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}^*$  est appelé *nombre quantique principal*.

Des mesures de spectroscopie atomique montraient clairement que le spectre d'émission des atomes était discret. Einstein avait alors établi que l'énergie était reliée à la fréquence  $\nu$  par  $E = h\nu$ . Si le spectre est discret, il en est donc de même des énergies. Ainsi, les hypothèses de quantification de Bohr étaient justifiées dans le sens où le résultat (3.324) confirmait les mesures expérimentales pour des atomes simples comme l'atome d'hydrogène (série de Balmer). Pour plus de détails, voir [11].

### 3.6.5.4 Le théorème de Liouville-Arnold\*

**Théorème 3.4 (Liouville-Arnold)** *Soit un système hamiltonien autonome intégrable à  $l$  degrés de liberté et d'hamiltonien conservé  $H$ ,  $\Gamma$  l'espace des phases, et  $I_1, \dots, I_l$  les constantes du mouvement (intégrales premières), alors*

- i) Il existe  $S \subset \Gamma$  une surface telle que la restriction de  $I_i$  sur  $S$  est constante au cours de l'évolution, et sur laquelle a lieu le mouvement ( $S$  est une variété lisse invariante par le flot).*
- ii)  $S$  est compacte et connexe, ce qui implique :*
  - a)  $S$  est difféomorphe au tore  $T^l = \{\varphi_i \mid \varphi_i \in [0, 2\pi[ \}_{i=1}^l$ , où  $\varphi_i$  sont dites variables d'angle,*
  - b) il existe un choix d'angles  $\varphi_i$  tel qu'il existe des variables canoniquement conjuguées "actions"  $J_i$  telles que l'hamiltonien ne dépende que des actions :  $H = H(\mathbf{J})$ .*

**Preuve:** la preuve dépasse le cadre de ce cours. On peut se référer à [14]. ■

Il est instructif d'interpréter le contenu du théorème. L'affirmation i est une simple reformulation de la définition de l'existence de  $l$  intégrales premières  $I_i$ . En effet, la donnée de  $l$  relations  $I_i = \text{cte}$  définit une surface de dimension  $l$  qui sera invariante si ces mêmes relations le sont. La partie a) du point ii est simple à comprendre si la surface est compacte (fermée et bornée) et connexe (en un seul morceau). En effet, une telle surface est topologiquement équivalente  $T^l$ . Le mouvement est donc localisé sur la surface d'un tore dont les rayons dépendent des angles et du temps (cf. Fig. 3.12).

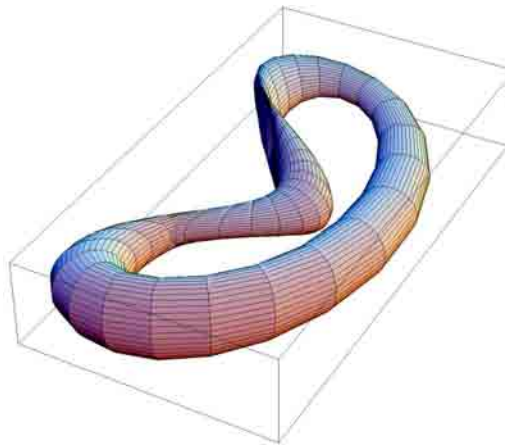


FIG. 3.12 – Théorème de Liouville-Arnold et tore déformé.

Dans le cas d'un système à deux degrés de liberté, il existe deux actions  $J_1, J_2$  (les grands et petits axes du tore), ainsi que deux angles  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  (les angles de rotation autour des grands et petits axes). Le point ii) a) du théorème de Liouville-Arnold affirme que le mouvement est localisé sur la surface du tore.

Finalement, le résultat remarquable de ce théorème est la partie b) du point ii, c'est-à-dire qu'il existe un choix d'angles tel que les rayons du tore soient constants. La dynamique est donc localisée sur la surface du tore dont la paramétrisation est donnée par les Eqs. (3.319) et (3.320) (cf. Fig. 3.13).

Le fait que les actions soient constantes permet d'étudier la dynamique du système dans une tranche du tore, par exemple pour un système à deux degrés de liberté la coupe définie en fixant l'angle de rotation  $\varphi_1$  du grand axe. Une telle coupe est appelée

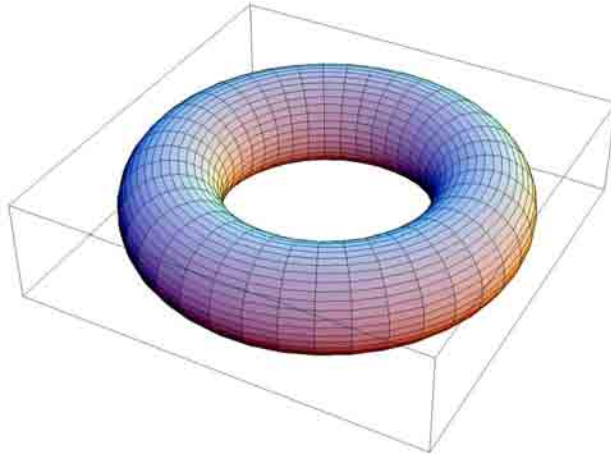


FIG. 3.13 – Théorème de Liouville-Arnold et tore non déformé.

La partie ii) b) du théorème affirme que le mouvement a lieu sur la surface du tore dont les rayons sont constants. Les angles sont donnés par  $\varphi_1 = \nu_1 t + \varphi_1(0)$ ,  $\varphi_2 = \nu_2 t + \varphi_2(0)$ . Si les deux fréquences sont incommensurables, c'est-à-dire  $\nu_1/\nu_2 \notin \mathbb{Q}$ , alors si  $\nu_1 \geq \nu_2$  il n'existe pas  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\nu_1 = n\nu_2$  et le mouvement n'est pas périodique donc remplit de façon dense la surface du tore.

*section de Poincaré.* L'étude de la dynamique dans la section de Poincaré permet alors d'obtenir d'importantes informations sur la dynamique (périodicité, stabilité, bifurcations, exposants de Liapunov, approches expérimentales). Ce théorème remarquable joue un rôle fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques (théorèmes de la variété centrale, de Floquet, KAM [16]).

## 3.7 Le problème à trois corps

### 3.7.1 Généralités

Ce problème s'inscrit dans le contexte plus général de l'interaction gravitationnelle de  $n$  corps. Soient  $n$  corps de masses  $m_i$  subissant une interaction à deux corps

$$\mathbf{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\hat{\mathbf{x}}_{ij}}{x_{ij}^2}, \quad (3.325)$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle,  $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^3$  la distance relative entre les corps  $i$  et  $j$ ,  $x_{ij} = |\mathbf{x}_{ij}|$ , et  $\hat{\mathbf{x}}_{ij} = \mathbf{x}_{ij}/x_{ij}$ .  $\mathbf{F}_{ij}$  est donc la force d'attraction exercée par  $m_i$  sur  $m_j$ . Notons  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{x}_i/dt$  les vitesses, et supposons les conditions initiales  $\mathbf{x}_i(0)$ ,  $\mathbf{v}_i(0)$  connues pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

Ce problème revêt un intérêt particulier car il pose la question de la stabilité des orbites des planètes de notre système solaire.

Dans l'approximation de Kepler, le système formé du soleil et d'un autre astre est intégrable. Le mouvement est plan, donc à deux degrés de liberté  $\{r, \theta\}$ . Les deux constantes du mouvement sont l'énergie et le moment cinétique (plus précisément la composante du moment cinétique qui est perpendiculaire à l'orbite).

Que se passe-t-il avec un troisième corps? En trois dimensions, chaque corps est décrit par sa position et sa vitesse, soit 6 coordonnées. Le nombre total de degrés de liberté est

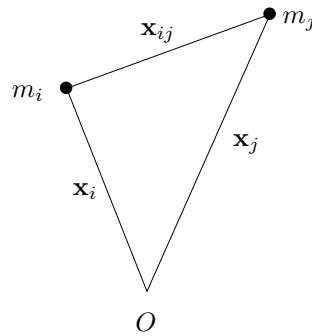


FIG. 3.14 – Problème à trois corps : coordonnées.

donc  $l = 9$  (les positions de chaque particule). Les constantes du mouvement sont données par :

- i)  $\mathbf{P}$  : les trois composantes de la quantité de mouvement totale (invariance par translation).
- ii) Les composantes  $\mathbf{L}^2$  et  $L_z$  du moment cinétique total (comme nous l'avons vu dans la Sec. 3.5, les trois composantes du moment cinétique total ne sont pas en involution).
- iv)  $E$  : l'énergie totale.

Il apparaît alors qu'il existe 6 constantes du mouvement (on peut montrer qu'il n'en existe pas d'autres que celles mentionnées ci-dessus), soit moins que le nombre de degrés de liberté. Le problème à trois corps n'est par conséquent pas intégrable. Néanmoins, il existe une solution analytique. Elle a été proposée par Sundman [17] en 1913, sous la forme d'une série convergente pour tout temps. Cette solution est pourtant de peu d'utilité pour l'étude des trajectoires car la convergence est très lente.

Dans le contexte de la stabilité du système solaire, une étude numérique montre que celui-ci revêt certains aspects chaotiques et imprévisibles. Les planètes massives extérieures ont des orbites quasi-périodiques et sont marginalement stables, c'est-à-dire qu'elles sont stables sur une durée de l'ordre de l'âge du système solaire. Par contre les conclusions sur la stabilité des orbites des planètes intérieures (Mercure, Vénus, la Terre) sont moins claires. Dans les limites du théorème KAM, la stabilité de ces orbites ne peut être établie que sur une courte période (sur une échelle astronomique). Entre aussi en jeu le mécanisme stabilisant non-linéaire de la dissipation, absent du théorème KAM, si bien que les prédictions sont difficiles.

### 3.7.2 Le problème à trois corps restreint

Si la solution générale du problème à trois corps est difficile à établir, il existe néanmoins des solutions approximatives d'un grand intérêt. Elles permettent de comprendre certains phénomènes stellaires observés (position des astéroïdes et point de Lagrange). Nous nous limiterons donc à l'étude du problème appelé problème à trois corps restreint caractérisé par les hypothèses suivantes :

- i) La masse de l'une des particules est tellement faible qu'elle n'influence plus la trajectoire des deux autres corps. Notons cette masse  $m$ . On va considérer le mouvement de cette dernière particule dans le plan défini par le mouvement des deux autres corps. Désignons cette particule par  $p$ .
- ii) Les deux corps  $m_1$  et  $m_2$  ont une orbite circulaire autour de leur centre de masse

commun, ce dernier étant immobile.

Le plan du calcul est le suivant :

1. Etablissement des trajectoires des particules  $m_1$  et  $m_2$  seules et d'un système de coordonnées adéquat.
2. Etablissement de l'équation du mouvement pour la particule  $p$  plongée dans le potentiel effectif  $U$  engendré par le mouvement des corps  $m_1$  et  $m_2$ .
3. Etude de certaines propriétés du potentiel  $U$ .
4. Recherche des points d'équilibre pour  $p$  en établissant les extréma de  $U$ .
5. Analyse de stabilité linéaire des points d'équilibre.
6. Applications des résultats obtenus.

**Trajectoire des particules  $m_1$  et  $m_2$  :** par hypothèse, chaque particule  $m_1$  et  $m_2$  se meut à vitesse constante sur un cercle. Le centre des deux cercles est le centre de masse commun. Le centre de masse étant immobile (dans son référentiel), les particules se situent sur une droite les reliant et passant par le centre de masse, et ont de plus la même vitesse angulaire constante  $\omega$ . Leur accélération d'amplitude  $\omega^2 r_i$  est par conséquent dirigée vers le centre de masse, où  $r_i$  est le rayon de l'orbite de  $m_i$ . L'amplitude de la force entre  $m_1$  et  $m_2$  est donc  $Gm_1m_2/(r_1 + r_2)^2$ , et par l'équation de Newton

$$\frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_1\omega^2r_1 = m_2\omega^2r_2. \quad (3.326)$$

Nous aurons par la suite besoin des relations suivantes. A partir de l'Eq. (3.326) il vient :

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^3}. \quad (3.327)$$

Insérant (3.327) dans le premier puis le second terme du membre de droite de l'Eq. (3.326) on obtient respectivement :

$$\frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.328)$$

$$\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.329)$$

Finalement, de (3.326) il est clair que

$$m_1r_1 = m_2r_2. \quad (3.330)$$

Soient  $X$  et  $Y$  les coordonnées de la particule  $p$  dans un repère cartésien fixe d'origine au centre de masse de  $m_1$  et  $m_2$ . Soient  $x$  et  $y$  les coordonnées de  $p$  dans un repère cartésien de même origine mais dont la direction de  $x$  est donnée par la droite reliant  $m_1$  et  $m_2$  en tout temps (cf. Fig. 3.15).

La transformation entre les coordonnées  $\{x, y\}$  et  $\{X, Y\}$  est

$$X = x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t), \quad (3.331)$$

$$Y = x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t). \quad (3.332)$$

Définissons  $\rho_1$  et  $\rho_2$  comme étant la distance entre la particule  $p$  et les corps  $m_1$  et  $m_2$  (cf. Fig. 3.15), alors

$$\rho_1^2 = (x + r_1)^2 + y^2, \quad (3.333)$$

$$\rho_2^2 = (x - r_2)^2 + y^2. \quad (3.334)$$

Il en découle

$$x^2 + y^2 = \frac{r_2\rho_1^2 + r_1\rho_2^2}{r_1 + r_2} - r_1r_2. \quad (3.335)$$

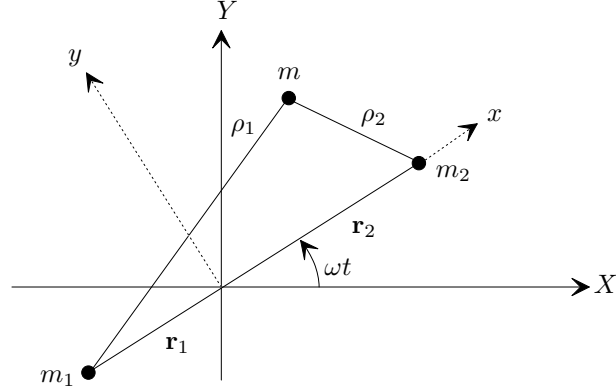


FIG. 3.15 – Problème à trois corps restreint : coordonnées.

**Equation du mouvement pour  $p$  :** l'énergie cinétique de  $p$  dans le référentiel  $\{X, Y\}$  est

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \stackrel{(3.333)}{=} \stackrel{(3.334)}{=} \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\omega\dot{x}y + 2\omega x\dot{y} + \omega^2(x^2 + y^2)], \quad (3.336)$$

et son énergie potentielle

$$V = -G\frac{mm_1}{\rho_1} - G\frac{mm_2}{\rho_2}. \quad (3.337)$$

Le lagrangien est donc  $L = T - V$ . Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (3.338a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (3.338b)$$

donnent

$$m\ddot{x} - 2m\omega\dot{y} - m\omega^2x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3.339a)$$

$$m\ddot{y} + 2m\omega\dot{x} - m\omega^2y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \quad (3.339b)$$

Définissons le potentiel effectif  $U$  par

$$U = \frac{V}{m} - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2 + r_1r_2), \quad (3.340)$$

alors les Eqs. (3.339) deviennent

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (3.341a)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (3.341b)$$

Les Eqs. (3.341) sont les équations du mouvement de la particule  $p$ . On comprend des Eqs. (3.341) que  $U$  joue bien le rôle du potentiel créé par le mouvement de  $m_1$  et  $m_2$ , et ressenti par la particule  $p$ . En effet, le membre de gauche est l'accélération de la particule  $p$  dans le référentiel tournant  $\{x, y\}$  à vitesse angulaire constante  $\omega$ .



**Propriétés du potentiel effectif :** comme nous le verrons dans la suite, une quantité appréciable d'informations sur la dynamique de  $p$  peut être extraite du potentiel effectif  $U$ . Nous établissons donc certaines propriétés de  $U$  qui s'avéreront utiles. Remplaçant les Eqs. (3.327), (3.328), (3.329), (3.335), et (3.337) dans (3.340), la définition de  $U$  prend la forme

$$U = -Gm_1 \left[ \frac{1}{\rho_1} + \frac{\rho_1^2}{2(r_1 + r_2)^3} \right] - Gm_2 \left[ \frac{1}{\rho_2} + \frac{\rho_2^2}{2(r_1 + r_2)^3} \right]. \quad (3.342)$$

Les dérivées de  $U$  sont données par

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_1} = Gm_1 \left[ \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{\rho_1}{(r_1 + r_2)^3} \right], \quad (3.343a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_2} = Gm_2 \left[ \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{\rho_2}{(r_1 + r_2)^3} \right], \quad (3.343b)$$

et serviront à trouver les points d'équilibre. Utilisant les Eqs. (3.333) et (3.334) on a

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{x + r_1}{\rho_1}, \quad (3.344)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} = \frac{x - r_2}{\rho_2}, \quad (3.345)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial y} = \frac{y}{\rho_1}, \quad (3.346)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial y} = \frac{y}{\rho_2}. \quad (3.347)$$

Les Eqs. (3.343) à (3.347), (3.327), et (3.330) avec (3.342) permettent de trouver

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Gm_1(x + r_1)}{\rho_1^3} + \frac{Gm_2(x - r_2)}{\rho_2^3} - \omega^2 x, \quad (3.348)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{Gm_1 y}{\rho_1^3} + \frac{Gm_2 y}{\rho_2^3} - \omega^2 y, \quad (3.349)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = Gm_1 \left[ \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{3(x + r_1)^2}{\rho_1^5} \right] + Gm_2 \left[ \frac{1}{\rho_2^3} - \frac{3(x - r_2)^2}{\rho_2^5} \right] - \omega^2, \quad (3.350)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Gm_1 \left[ \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{3y^2}{\rho_1^5} \right] + Gm_2 \left[ \frac{1}{\rho_2^3} - \frac{3y^2}{\rho_2^5} \right] - \omega^2, \quad (3.351)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -Gm_1 \frac{3(x + r_1)y}{\rho_1^5} - Gm_2 \frac{3(x - r_2)y}{\rho_2^5}. \quad (3.352)$$

Multipliant l'Eq. (3.341a) par  $\dot{x}$  et l'Eq. (3.341b) par  $\dot{y}$ , puis additionnant les équations ainsi obtenues on a

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}, \quad (3.353)$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{y} \right) = -\frac{dU}{dt}. \quad (3.354)$$

Par intégration il en découle

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + U = C, \quad (3.355)$$

où  $C$  est une constante déterminée par les conditions initiales. La quantité  $\dot{x}^2/2 + \dot{y}^2/2 + U$  est donc une constante du mouvement. La même conclusion peut être obtenue en

constatant que  $L$  ne dépend pas explicitement du temps, par conséquent  $E = H = T + V$  est une constante du mouvement. A nouveau, nous constatons que l'Eq. (3.355) est formellement la même relation que pour l'énergie d'une particule de masse unité dans un potentiel  $U$ , d'où l'interprétation de  $U$  comme potentiel effectif.

Les solutions d'équilibre de l'Eq. (3.341) seront données par  $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$ . Cependant, la présence du second terme dans le membre de droite fait que les équilibres stables ne correspondent pas forcément aux minima de  $u$ . Une analyse de stabilité linéaire déterminera les solutions stables.

**Points d'équilibre pour  $p$  :** des Eqs. (3.341) il découle que la particule  $p$  peut rester immobile dans le référentiel tournant en tout point pour lequel  $\partial U/\partial x = \partial U/\partial y = 0$ . De tels points sont appelés points d'équilibre. La condition d'équilibre s'écrit donc

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0, \quad (3.356a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} = 0. \quad (3.356b)$$

Les Eqs. (3.356) peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\doteq \mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial y} & \frac{\partial \rho_2}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\doteq \mathbf{M}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial U}{\partial \rho_2} \end{pmatrix}}_{\doteq \mathbf{b}} = 0. \quad (3.357)$$

Le système (3.357) admet une solution  $\mathbf{a} = 0$  dans les deux cas suivants :

i) Si  $\mathbf{b} = 0$  pour toute valeur de  $\mathbf{M}$ , alors la condition s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U}{\partial \rho_2} = 0. \quad (3.358)$$

Substituant les Eqs. (3.343) dans (3.358) on obtient immédiatement

$$\rho_1 = \rho_2 = r_1 + r_2. \quad (3.359)$$

Ceci s'interprète géométriquement de la façon suivante. Si on construit un triangle équilatéral avec les corps  $m_1$  et  $m_2$  en deux sommets, alors le troisième sommet est un point d'équilibre. Il existe deux tels points, le premier étant dans la région  $y > 0$  et le second dans la région  $y < 0$ . Le point correspondant à  $y > 0$  est appelé *quatrième point de Lagrange*, libellé  $L_4$ , tandis que celui pour  $y < 0$  est appelé *cinquième point de Lagrange*, libellé  $L_5$  (cf. Fig. 3.17).

ii) Si  $\mathbf{b} \neq 0$ , alors  $\det \mathbf{M} = 0$ , soit utilisant les Eqs. (3.344) à (3.347) :

$$\det \mathbf{M} = \det \begin{pmatrix} \frac{x+r_1}{\rho_1} & \frac{x-r_2}{\rho_2} \\ \frac{y}{\rho_1} & \frac{y}{\rho_2} \end{pmatrix} = y \frac{r_1 + r_2}{\rho_1 \rho_2} = 0. \quad (3.360)$$

Le déterminant est nul si et seulement si  $y = 0$ . Ainsi tous les autres points d'équilibre doivent être sur l'axe  $x$ . Posant  $y = 0$  dans l'Eq. (3.348), égalant le résultat à zéro, et remarquant que pour  $y = 0$  on a  $\rho_1 = |x + r_1|$  et  $\rho_2 = |x - r_2|$  on obtient

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Gm_1(x + r_1)}{|x + r_1|^3} + \frac{Gm_2(x - r_2)}{|x - r_2|^3} - \omega^2 x = 0. \quad (3.361)$$

Cette équation a trois solutions. La première solution est dans la région  $x < -r_1$ , la seconde dans  $-r_1 < x < r_2$ , et la troisième pour  $x > r_2$ . Pour le vérifier, remarquons que de l'Eq. (3.350) la dérivée seconde de  $U$  par rapport à  $x$  en  $y = 0$  est

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{2m_1}{|x+r_1|^3} - \frac{2m_2}{|x-r_2|^3} - \omega^2. \quad (3.362)$$

La dérivée seconde est donc partout négative, sauf aux points  $x = -r_1$  et  $x = r_2$  où elle n'est pas définie. Par conséquent  $\partial U/\partial x$  est décroissante dans chacune des régions définies ci-dessus. Ainsi, lorsque  $x$  va de  $-\infty$  à  $-r_1$ ,  $\partial U/\partial x$  est décroissante monotone de  $+\infty$  à  $-\infty$ , donc il y a une et une seule racine dans cet intervalle. Il en va de même pour les autres intervalles (cf. Fig. 3.16).

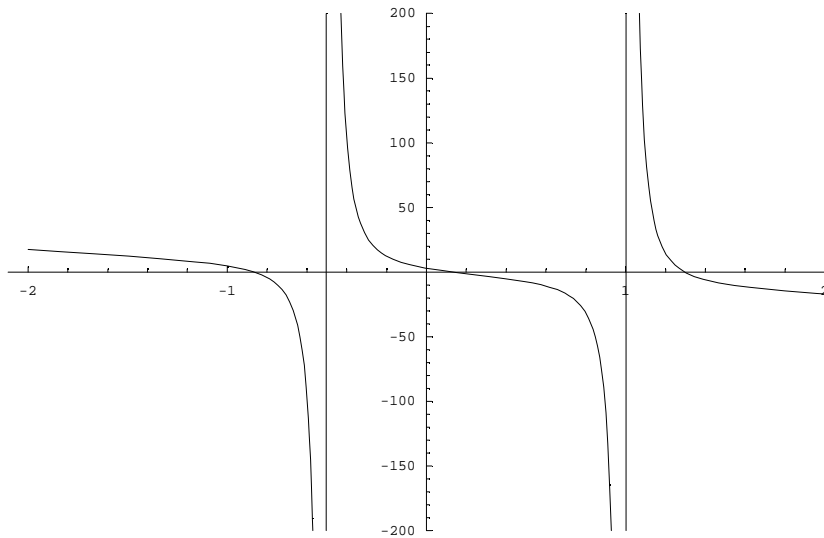


FIG. 3.16 – Problème à trois corps restreint : racines et points d'équilibre.

Représentation de la fonction  $\partial U/\partial x$  pour  $Gm_1 = Gm_2 = 1$ ,  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 1$ , et  $\omega = 3$ . On constate l'existence de trois racines distinctes, définissant ainsi les trois premiers points de Lagrange.

Ces trois points d'équilibre définissent ainsi les *trois premiers points de Lagrange*, soit  $L_3$  (pour  $x < -r_1$ ),  $L_1$  (pour  $-r_1 < x < r_2$ ), et  $L_2$  (pour  $x > r_2$ ).

Les cinq points de Lagrange ainsi trouvés sont représentés dans la Fig. 3.17.

Une analyse plus détaillée du potentiel  $U$  aux points d'équilibre montre que  $L_1$ ,  $L_2$ , et  $L_3$  sont des points selle de  $U$ , tandis que  $L_4$  et  $L_5$  sont des maxima.

**Stabilité linéaire :** Il existe donc cinq points de Lagrange, solutions d'équilibre du problème. Pour qu'une solution d'équilibre soit physiquement réalisable, il faut qu'elle soit stable. En effet, si l'on déplace légèrement la particule relativement à sa position d'équilibre et que l'on regarde son évolution, divers scénarios peuvent se présenter. Premièrement, la particule s'éloigne encore plus du point d'équilibre. Le point d'équilibre est donc instable. Deuxièmement, la particule retourne au point d'équilibre et cet équilibre est donc stable et physiquement acceptable.

La question de la stabilité de l'équilibre est un problème général en physique et se rencontre dans divers domaines. Aussi les méthodes développées pour y répondre sont génériques. La difficulté principale vient du fait que les équations décrivant la dynamique sont généralement non-linéaires. Comprendre comment évolue une perturbation arbitraire

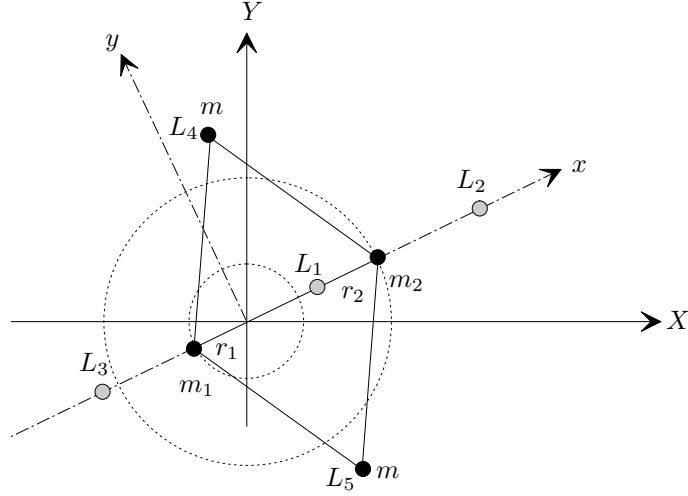


FIG. 3.17 – Problème à trois corps restreint : les cinq points de Lagrange.

d'un état d'équilibre n'est souvent pas possible analytiquement. Par contre si la perturbation est très petite, la dynamique pourra être linéarisée autour de l'état d'équilibre. Les équations à résoudre sont alors linéaires et il est souvent possible de les résoudre analytiquement. Cette approche est appelée *analyse linéaire de stabilité*.

Soient  $\{x_0, y_0\}$  les coordonnées d'un point de Lagrange, alors définissons les écarts  $\xi$  et  $\eta$  par

$$x = x_0 + \xi, \quad (3.363)$$

$$y = y_0 + \eta. \quad (3.364)$$

Utilisons de plus la notation abrégée  $U_x, U_y, U_{xx}, \dots$  pour représenter les différentes dérivées partielles de  $U$ . Les équations du mouvement (3.341) prennent donc la forme

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} = -U_x(x_0 + \xi, y_0 + \eta), \quad (3.365a)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} = -U_y(x_0 + \xi, y_0 + \eta). \quad (3.365b)$$

En développant le membre de droite des Eqs. (3.365) au premier ordre autour de  $\xi = \eta = 0$  on obtient

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} = -U_{xx}(x_0, y_0)\xi - U_{xy}(x_0, y_0)\eta, \quad (3.366a)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} = -U_{xy}(x_0, y_0)\xi - U_{yy}(x_0, y_0)\eta. \quad (3.366b)$$

En effet, le terme d'ordre zéro est nul par définition de  $\{x_0, y_0\}$ .

Considérons d'abord un voisinage d'un des points de Lagrange  $L_1, L_2$ , ou  $L_3$ , alors  $y_0 = 0$ ,  $\rho_1 = |x_0 + r_1|$ , et  $\rho_2 = |x_0 - r_2|$ . Les Eqs. (3.350) à (3.352) deviennent alors

$$U_{xx}(x_0, y_0) = -2\Omega^2 - \omega^2, \quad (3.367)$$

$$U_{xy}(x_0, y_0) = 0, \quad (3.368)$$

$$U_{yy}(x_0, y_0) = \Omega^2 - \omega^2, \quad (3.369)$$

où

$$\Omega^2 = \frac{Gm_1}{|x_0 + r_1|^3} + \frac{Gm_2}{|x_0 - r_2|^3}. \quad (3.370)$$

Substituant les Eqs. (3.367) à (3.369) dans le système (3.366) on a

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - (2\Omega^2 + \omega^2)\xi = 0, \quad (3.371a)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + (\Omega^2 - \omega^2)\eta = 0. \quad (3.371b)$$

La solution du système (3.371) est de la forme

$$\xi = A \exp(\lambda t), \quad (3.372a)$$

$$\eta = B \exp(\lambda t), \quad (3.372b)$$

où  $A$ ,  $B$ , et  $\lambda$  sont des constantes qui peuvent être complexes. Insérant (3.372) dans (3.371) il vient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\Omega^2 - \omega^2 & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 + \Omega^2 - \omega^2 \end{pmatrix}}_{\doteq \mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.373)$$

Une solution non triviale pour  $A$  et  $B$  existe si  $\det \mathbf{M} = 0$  :

$$\det \mathbf{M} = \lambda^4 - (\Omega^2 - 2\omega^2)\lambda^2 - (2\Omega^2 + \omega^2)(\Omega^2 - \omega^2) = 0. \quad (3.374)$$

La résolution de cette équation pour  $\lambda^2$  donne

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(\Omega^2 - 2\omega^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{9\Omega^4 - 8\Omega^2\omega^2}. \quad (3.375)$$

Mais de l'Eq. (3.361), le point d'équilibre  $x_0$  vérifie la relation

$$\frac{Gm_1(x_0 + r_1)}{|x_0 + r_1|^3} + \frac{Gm_2(x_0 - r_2)}{|x_0 - r_2|^3} - \omega^2 x_0 = 0. \quad (3.376)$$

Combinant les Eqs. (3.370) et (3.376) en se rappelant que  $m_1 r_1 = m_2 r_2$  on obtient

$$(\Omega^2 - \omega^2) = \frac{Gm_1 r_1}{x_0} \left( \frac{1}{|x_0 - r_2|^3} - \frac{1}{|x_0 + r_1|^3} \right). \quad (3.377)$$

Si  $x_0 < -r_1$  ou  $x_0 > r_2$ , le membre de droite de (3.377) est positif, d'où  $\Omega^2 > \omega^2$ . Si  $-r_1 < x_0 < r_2$ , une comparaison directe des définitions de  $\Omega^2$  et  $\omega^2$  montre à nouveau que  $\Omega^2 > \omega^2$ . Ainsi, dans tous les cas  $\Omega^2 > \omega^2$ . Nous désirons montrer qu'il existe toujours une solution telle que  $\lambda > 0$ , définissant ainsi une instabilité. Pour cela, choisissons le signe positif dans l'Eq. (3.375), qui devient

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\Omega^2 \left[ (1 - 2\gamma) + \sqrt{9 - 8\gamma} \right], \quad (3.378)$$

avec

$$\gamma = \frac{\omega^2}{\Omega^2} \in [0, 1[ \quad (3.379)$$

car  $\Omega^2 > \omega^2$ . De plus

$$\frac{d}{d\gamma} \lambda^2 = \frac{1}{2}\Omega^2 \left[ -2 - 4 \frac{1}{\sqrt{9 - 8\gamma}} \right] < 0. \quad (3.380)$$

Comme  $\gamma$  est compris entre 0 et 1, alors  $\lambda^2$  est réel et de plus décroît de façon monotone de  $2\Omega^2$  pour  $\gamma = 0$  à 0 pour  $\gamma = 1$ . Ainsi il existe toujours une valeur positive réelle de  $\lambda$ , qui substituée dans les Eqs. (3.372) fournit une solution aux Eqs. (3.371). Une telle solution croît exponentiellement en fonction du temps, donc il s'agit d'une solution instable. Les points d'équilibre de Lagrange  $L_1$ ,  $L_2$ , et  $L_3$  sont par conséquent instables.

Considérons à présent le mouvement dans le voisinage du point de Lagrange  $L_4$ , alors  $\rho_1 = \rho_2 = r_1 + r_2 \doteq \rho$ ,  $x_0 + r_1 = \rho/2$ ,  $x - r_2 = -\rho/2$ ,  $y = \sqrt{3}\rho/2$  (la discussion est similaire pour  $L_5$ ). Ainsi

$$U_{xx} = -3\alpha^2, \quad (3.381)$$

$$U_{xy} = -\beta^2, \quad (3.382)$$

$$U_{yy} = -9\alpha^2, \quad (3.383)$$

où

$$\alpha = \frac{\omega}{2}, \quad (3.384)$$

$$\beta^2 = \frac{3\sqrt{3} m_1 - m_2}{4 m_1 + m_2} \omega^2. \quad (3.385)$$

Substituant les Eqs. (3.381) à (3.385) dans les Eqs. (3.366) il vient

$$\ddot{\xi} - 4\alpha\dot{\eta} - 3\alpha^2\xi - \beta^2\eta = 0, \quad (3.386a)$$

$$\ddot{\eta} + 4\alpha\dot{\xi} - 9\alpha^2\eta - \beta^2\xi = 0. \quad (3.386b)$$

Insérant les Eqs. (3.372) dans le système (3.386) on obtient le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 - 3\alpha^2 & -4\alpha\lambda - \beta^2 \\ 4\alpha\lambda - \beta^2 & \lambda^2 - 9\alpha^2 \end{pmatrix}}_{\doteq \mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.387)$$

A nouveau, il existe une solution non triviale pour  $A$  et  $B$  si  $\det \mathbf{M} = 0$ , ce qui en utilisant les Eqs. (3.384) et (3.385) donne

$$\lambda^4 + 4\alpha^2\lambda^2 + 4\alpha^4R^2 = 0, \quad (3.388)$$

où

$$R^2 = \frac{27m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (3.389)$$

La solution pour  $\lambda^2$  est

$$\lambda^2 = 2\alpha^2 \left( -1 \pm \sqrt{1 - R^2} \right). \quad (3.390)$$

Si  $R^2 < 1$ , on obtient quatre valeurs purement imaginaires de  $\lambda$ , et par conséquent le mouvement est stable. Le cas  $R^2 = 1$  mène aussi à des valeurs purement imaginaires de  $\lambda$  donc un mouvement stable. Si  $R^2 > 1$ , on obtient quatre valeurs complexes pour  $\lambda$ , dont deux ont une partie réelle positive et le mouvement est par conséquent instable. Il en découle que les points d'équilibre  $L_4$  et  $L_5$  sont stables si et seulement si

$$R^2 = \frac{27m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \leq 1, \quad (3.391)$$

ou de façon similaire si et seulement si

$$\frac{m_1}{m_2} \quad \text{ou} \quad \frac{m_2}{m_1} \leq \frac{25 - \sqrt{621}}{2} \simeq \frac{1}{25}. \quad (3.392)$$

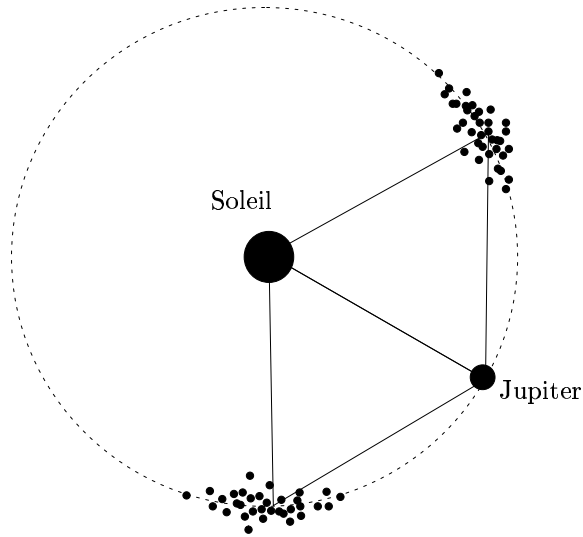


FIG. 3.18 – Problème à trois corps restreint : troyens de Jupiter.

**Applications :** les points de Lagrange sont d'un intérêt particulier, comme l'illustrent les exemples suivants.

- i) Soit le système dans lequel le corps  $m_1$  est le soleil et le second  $m_2$  Jupiter, alors on trouve en  $L_4$  et  $L_5$  un amas d'astéroïdes. On appelle ces astéroïdes les *troyens* de Jupiter (cf. Fig. 3.18).  
Les troyens découverts en  $L_4$  sont appelés *Troyens*, et ceux découverts en  $L_5$  les *Greco*. D'autres astres comme Mars et Thetis (une des lunes de Saturne) possèdent aussi des troyens.
- ii) Le point  $L_5$  du système dans lequel le corps  $m_1$  est la terre et  $m_2$  la lune a été un des premiers sites suggérés pour l'établissement d'une station dans l'optique de la colonisation spatiale.
- iii) Le point  $L_1$  du couple Terre-Soleil est utilisé en astronautique. On y trouve l'observatoire spatial SOHO. Ce satellite est situé à 1.5 million de kilomètres de la Terre en direction du Soleil, permettant à SOHO d'observer notre étoile en permanence. Cependant, comme nous l'avons vu  $L_1$  n'est pas stable, donc l'observatoire est contraint à emprunter une orbite qui décrit une large ellipse allongée autour du point  $L_1$ . Toutes les 8 semaines environ, la station est obligée de corriger son orbite à l'aide de ses moteurs.
- iv) Le point  $L_2$  du couple Terre-Soleil est pour le moment inoccupé, mais c'est le lieu retenu pour le futur successeur du télescope spatial Hubble (le NGST).

Notons encore quelques ordres de grandeur sur les masses des astres en jeu dans les exemples précédents. La masse du soleil est  $m_S = 1.99 \cdot 10^{30}$  kg, celle de Jupiter  $m_J = 1.90 \times 10^{27}$  kg, celle de la Terre  $m_T = 5.98 \times 10^{24}$  kg, et celle de la Lune  $m_L = 7.35 \times 10^{22}$  kg. On a donc  $m_J/m_S = 9.6 \times 10^{-4}$  et  $m_L/m_T = 1.3 \times 10^{-2}$ , vérifiant ainsi la condition (3.392).





# Chapitre 4

## Théorie de la relativité restreinte

### 4.1 Introduction

Les limites de validité de la mécanique newtonienne sont discutées, conduisant à l'énoncé des postulats de la théorie de la relativité restreinte. Les transformations de Lorentz sont alors introduites. La cinématique relativiste et ses conséquences physiques sont brièvement revues. La dynamique relativiste est alors abordée et les expressions pour l'énergie, l'impulsion, et la force sont dérivées. Finalement, on discute les approches lagrangienne et hamiltonienne relativistes.

### 4.2 Limites de validité de la mécanique newtonienne

La mécanique newtonienne, découlant d'observations expérimentales à faibles vitesses  $v \ll c$  où  $c$  est la vitesse de la lumière, postule l'invariance des lois de la physique sous les *transformations de Galilée*.

**Définition 4.1** Soient  $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$  les coordonnées temporelles et spatiales dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et  $(t', \mathbf{x}') \in \mathbb{R}^4$  celles dans  $\mathcal{R}'$ . Soit  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  un vecteur quelconque, alors une *transformation de Galilée* est définie par

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} + \mathbf{u}t \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

On peut vérifier que la composition de deux transformations de Galilée est encore une transformation de Galilée, qu'il existe un élément neutre, et que pour chaque transformation de Galilée la transformation inverse existe. Les transformations de Galilée forment donc un groupe euclidien continu à 3 paramètres  $\mathbf{u}$ . On rappelle qu'un *groupe euclidien* est un groupe qui laisse invariante la distance entre deux points par rapport à la *métrie euclidienne* (métrique définie par la matrice unité). Les trois paramètres  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  définissent la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Notons que la définition précédente est un cas particulier d'une *transformation de Galilée inhomogène* [8]. De l'Eq. (4.1) on voit que le temps apparaît comme un concept absolu. Cette même équation implique que la loi de Newton  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  est invariante par rapport aux transformations de Galilée. De plus la loi d'addition des vitesses s'écrit

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}. \quad (4.2)$$

**Définition 4.2** On appelle *référentiel d'inertie* un référentiel euclidien muni d'une unité de longueur et de temps, par rapport auquel tout corps isolé a un mouvement rectiligne uniforme.

Le *principe d'équivalence* de Newton stipule que tous les phénomènes physiques doivent prendre la même forme dans les référentiels inertiels. Une mesure réalisée dans un système particulier ne doit pas être différente de la même mesure réalisée dans tout autre référentiel d'inertie. Ce postulat d'équivalence implique que toutes les lois de la physique doivent être formulés de façon identique dans tous les référentiels inertiels, c'est-à-dire que les lois physiques sont *covariantes* par rapport aux transformations de Galilée.

L'expérience met néanmoins en défaut le principe d'équivalence de Newton. Historiquement, c'est au vingtième siècle que l'on constate expérimentalement que les équations de l'électrodynamique ne satisfont pas à ce principe d'équivalence. De plus, en 1881 Michelson et Morley [18] réalisèrent une série d'expériences mettant en évidence le fait que la vitesse de la lumière est indépendante de l'état de mouvement du référentiel depuis laquelle elle est émise. Afin d'assurer la covariance de l'électrodynamique, Einstein en conclut que la covariance par rapport aux transformations de Galilée n'est qu'une approximation valable à faible vitesse et qu'un groupe de transformations plus général doit être introduit.

### 4.3 Les postulats de la relativité restreinte

1. Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie.
2. La lumière se déplace en ligne droite dans le vide et sa vitesse est la même dans tous les référentiels d'inertie.

## 4.4 La transformation de Lorentz

### 4.4.1 Distance entre deux événements

Comme la vitesse de la lumière  $c$  est la même dans tous les référentiels d'inertie, elle peut être utilisée comme unité de conversion entre le temps et l'espace. Ainsi, l'intervalle temporel  $\Delta t$  sera mesuré dans les unités équivalentes d'espace  $c\Delta t$ . On voit donc surgir une conséquence des postulats de la relativité restreinte selon laquelle le temps et l'espace sont considérés comme entités "équivalentes". Le formalisme de la relativité restreinte s'élabore donc dans un espace pseudo-euclidien à 4 dimensions : l'espace-temps, ou *espace de Minkowski*.

Soient deux points  $A$  et  $B$  séparés d'une distance  $\Delta \mathbf{x}$  dans un référentiel d'inertie. Supposons qu'un rayon lumineux soit émis du point  $A$  et arrive en  $B$  après  $\Delta t$ , alors

$$(\Delta \mathbf{x})^2 = c^2(\Delta t)^2. \quad (4.3)$$

Considérons cette fois un référentiel en mouvement par rapport à l'observateur. Alors la relation (4.3) s'écrit dans les nouvelles coordonnées :

$$(\Delta \mathbf{x}')^2 = c^2(\Delta t')^2, \quad (4.4)$$

car par le second postulat la vitesse de la lumière  $c$  est constante. Définissons la notion d'événement.

**Définition 4.3** La grandeur  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x})$  est appelée *événement*.

Les Eqs. (4.3) et (4.4) signifient que si la *distance*  $(\Delta s)^2$  entre deux événements, définie par

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{x})^2, \quad (4.5)$$

est telle que  $\Delta s = 0$  dans  $\mathcal{R}$ , alors  $\Delta s' = 0$  dans  $\mathcal{R}'$ . Dans le cas général où la distance entre deux événements n'est pas forcément nulle :

$$\Delta s = \lambda(\mathbf{v})\Delta s', \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , et  $\lambda(\mathbf{v})$  un coefficient régulier qui dépend a priori de la vitesse. Remarquons que l'Eq. (4.6) n'est pas la relation la plus générale garantissant la nullité simultanée de  $\Delta s$  et  $\Delta s'$ . Néanmoins, la seule transformation acceptable est bien linéaire. Il s'agit d'une conséquence directe (mais non triviale) du premier postulat de la relativité restreinte, et en particulier de la définition du référentiel d'inertie. En effet, la seule possibilité pour que les équations du mouvement linéaires d'une particule libre dans  $\mathcal{R}$  soient aussi linéaires dans  $\mathcal{R}'$  est d'avoir une transformation linéaire. La preuve est reproduite en détail dans la référence [19]. L'équivalence des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  entraîne

$$\Delta s' = \lambda(-\mathbf{v})\Delta s. \quad (4.7)$$

Des Eqs. (4.6) et (4.7) on tire

$$\lambda(\mathbf{v})\lambda(-\mathbf{v}) = 1. \quad (4.8)$$

D'autre part, la fonction  $\lambda(\mathbf{v})$  est symétrique (ce qui se comprend aisément dans des cas particuliers pour lesquels tout événement reste inchangé sous l'inversion spatiale  $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ ; pour le cas général, voir la référence [19]). Donc

$$\lambda(\mathbf{v}) = \lambda(-\mathbf{v}). \quad (4.9)$$

Les Eqs. (4.8) et (4.9) impliquent donc  $\lambda(\mathbf{v})^2 = 1$ , d'où  $\lambda(\mathbf{v}) = \pm 1$ . Comme  $\lambda(\mathbf{v})$  doit se réduire à  $+1$  pour  $\mathbf{v} = 0$ , seule la solution  $\lambda(\mathbf{v}) = 1$  convient. Ainsi l'Eq. (4.6) devient

$$\Delta s = \Delta s'. \quad (4.10)$$

La distance entre deux événements est donc un invariant relativiste pour les référentiels inertiels.

Mentionnons que le choix du signe de  $(\Delta s)^2$  est arbitraire, et est parfois différent dans la littérature (comme nous le verrons de l'Eq. (4.17)). Dans le cas d'événements infiniment proches, on note

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 = (ds')^2. \quad (4.11)$$

La distance entre deux événements peut être représentée de façon géométrique à l'aide d'un *diagramme de Minkowski* (cf. Fig. 4.1).

On suppose qu'un événement  $E_0$  a lieu en  $x = 0$  et  $t = 0$ , c'est-à-dire à l'origine du diagramme de la Fig. 4.1.

Si  $(\Delta s)^2 = 0$  alors la particule se déplace à la vitesse de la lumière. En effet, la distance parcourue par une telle particule sera, par le second postulat, toujours égale à  $cdt$ . Si deux événements sont tels que  $(\Delta s)^2 = 0$ , alors on dit que ces événements se trouvent sur le *cône de lumière*.

Si  $(\Delta s)^2 > 0$  alors le corps se déplace à une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière. Ce cas correspond par exemple au point  $E_1$  de la Fig. 4.1. La distance qui sépare  $E_0$  de  $E_1$  est alors dite intervalle du genre temps.

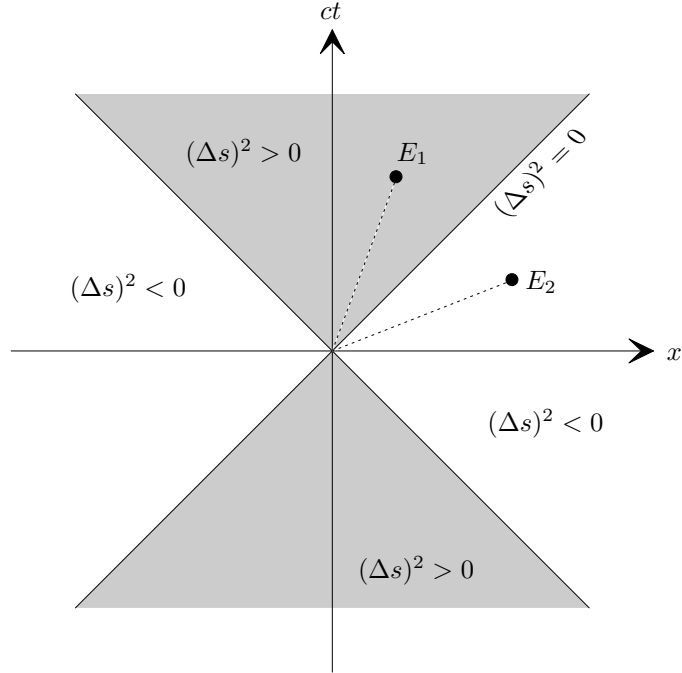


FIG. 4.1 – Diagramme de Minkowski.

Si  $(\Delta s)^2 < 0$  alors les deux événements  $E_0$  et  $E_2$  ne peuvent pas être connectés par un signal car ce dernier devrait se déplacer à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Aucun signal ne peut être envoyé depuis l'origine pour influencer un événement tel que  $(\Delta s)^2 < 0$ . On dit alors que l'intervalle est du genre espace.

Les événements à l'intérieur du cône de lumière pour  $t > 0$  peuvent donc être atteints par un signal partant de l'origine. Tout événement dans ce demi-plan supérieur se situe donc dans le futur. Les événements à l'intérieur du cône de lumière pour  $t < 0$  sont des événements qui peuvent être perçus à l'origine. Tout événement dans ce demi-plan inférieur appartient donc au passé. Les événements en dehors du cône de lumière sont dans une région inaccessible appelée "ailleurs".

Comme conséquence des idées développées dans cette section, nous constatons le lien étroit entre les coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle. Il apparaît donc naturel de développer un formalisme dans lequel ces coordonnées sont mélangées. Pour ce faire, il peut être utile de rappeler quelques notions de calcul tensoriel (cf. annexe A.8).

#### 4.4.2 Transformation et groupe de Lorentz

Adoptons la notation quadri-vectorielle  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$ . Nous savons que la distance entre deux événements est un invariant relativiste, ce qui s'écrit

$$(\Delta s')^2 = (\Delta x'^0)^2 - (\Delta x'^1)^2 - (\Delta x'^2)^2 - (\Delta x'^3)^2. \quad (4.12)$$

Comme montré dans l'annexe A.8, les variables  $x'^{\mu}$  dans  $\mathcal{R}'$  s'expriment en termes des variables  $x^{\mu}$  dans  $\mathcal{R}$  selon une relation linéaire. L'Eq. (4.12) prend donc en général la forme

$$(\Delta s')^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu}, \quad (4.13)$$

où  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  est le tenseur métrique symétrique. Nous adoptons dorénavant la convention de Einstein avec sommation sur les indices répétés. Déterminons les éléments  $g_{\mu\nu}$ , sans faire l'hypothèse a priori que ces éléments sont indépendants de la vitesse  $\mathbf{v}$ . Pour ceci, considérons d'abord l'événement sur le cône de lumière  $x = (\Delta x^0, \pm \Delta x^0, 0, 0)$ , alors  $(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^0)^2 = 0$ . Il doit donc en être de même de  $(\Delta s')^2$ , ce qui dans l'Eq. (4.13) donne

$$0 = g_{00}(\Delta x^0)^2 \pm 2g_{01}(\Delta x^0)^2 + g_{11}(\Delta x^0)^2, \quad (4.14)$$

d'où

$$g_{00} \pm 2g_{01} + g_{11} = 0. \quad (4.15)$$

Ceci étant vrai quel que soit le signe de  $\pm g_{01}$ , il faut que  $g_{01} = 0$ . Ainsi  $g_{00} = -g_{11}$ . En faisant le même raisonnement avec les composantes spatiales 2 et 3 on trouve

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} \pm\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp\lambda & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{12} & \mp\lambda & g_{23} \\ 0 & g_{13} & g_{23} & \mp\lambda \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

La partie spatiale hors-diagonale s'annule pour des raisons d'invariance sous les rotations de la forme quadratique. Par conséquent

$$(\Delta s')^2 = \pm\lambda(\Delta s)^2. \quad (4.17)$$

Or comme nous l'avons déjà vu dans la Sect. 4.4.1, il faut que  $\Delta s' = \Delta s$  donc l'Eq. (4.17) implique  $\lambda = \pm 1$ . Nous avons la liberté sur le choix du signe de  $\lambda$ , et prenons  $\lambda = 1$ . Par conséquent, le tenseur métrique est le même pour tout référentiel d'inertie et est donné par

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

On se souvient que le groupe euclidien est défini comme l'ensemble des transformations sur  $\mathbb{R}^3$  qui laissent la distance entre tout couple de points invariante. De façon analogue, nous définissons le *groupe de Poincaré* dans l'espace de Minkowski (l'espace des événements  $x$ ) muni de la métrique  $g_{\mu\nu}$  comme l'ensemble des transformations (non forcément linéaires) qui laissent la distance entre deux événements invariante. On s'intéresse au cas particulier du *groupe de Lorentz* pour lequel les transformations sont linéaires et le produit scalaire est une isométrie dans l'espace de Minkowski.

**Définition 4.4** Une *transformation de Lorentz*  $\Lambda$  est une application linéaire sur l'espace de Minkowski laissant la forme bilinéaire définie par le tenseur métrique (4.18) invariante, c'est-à-dire  $\Lambda^\mu{}_\gamma x^\gamma \Lambda_\mu{}^\delta y_\delta = x^\mu y_\mu$  pour tous événements  $x$  et  $y$ . L'ensemble de ces transformations forme le **groupe de Lorentz**.

Les matrices de transformation de Lorentz  $\Lambda = \{\Lambda^\mu{}_\nu\}$  vérifient  $\Lambda^t \cdot \mathbf{g} \cdot \Lambda = \mathbf{g}$ . Cette dernière expression pourrait aussi être prise comme définition du groupe de Lorentz. En effet, l'égalité  $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$  s'écrit

$$x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu} = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}, \quad (4.19)$$

avec  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho$  (cf. annexe A.8), d'où

$$\begin{aligned} \underbrace{x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu}}_{= x^\rho x^\sigma g_{\rho\sigma}} &= \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma g_{\mu\nu}, \\ \implies g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma &= g_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

ce qui se réécrit sous forme matricielle  $\Lambda^t \cdot \mathbf{g} \cdot \Lambda = \mathbf{g}$ . Notons aussi, comme montré dans l'annexe A.8, que si  $x^\mu$  est contravariant, alors  $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$  est covariant. La métrique permet donc de passer d'une propriété de contravariance à une propriété de covariance, et vice-versa. De plus, pour le cas particulier de la métrique de Minkowski on vérifie que  $g_{\mu\nu} = g_\mu{}^\nu = g^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu}$ . Toute contraction d'indices se fait entre un rang contravariant et un rang covariant. On écrit donc le produit scalaire  $x^\mu y_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$ . Les transformations que nous allons étudier dans ce chapitre sont des éléments du *groupe de Lorentz restreint*.

**Définition 4.5** On appelle *groupe de Lorentz restreint* le sous-groupe des transformations de Lorentz  $\Lambda$  telles que  $\det \Lambda = 1$  et  $\Lambda^0_0 \geq 1$ .

Dans la suite, pour des raisons de simplicité d'écriture nous allons étudier le cas particulier du groupe de Lorentz restreint pour lequel les transformations ne font pas intervenir de rotations et sont dirigées dans une seule direction spatiale. On appelle une telle transformation un *boost*. La figure 4.2 illustre un boost dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_1$ , c'est-à-dire une transformation pour laquelle la vitesse relative  $\mathbf{v}$  du second référentiel  $\mathcal{R}'$  est orientée dans la direction de  $x^1$  uniquement.

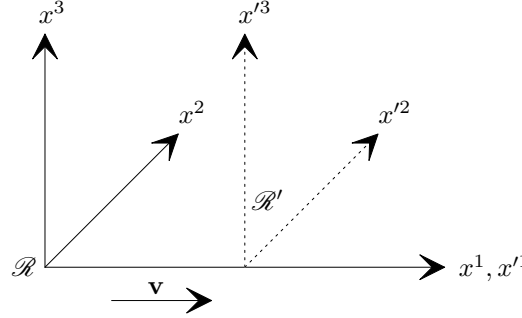


FIG. 4.2 – Boost dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_1$ .

Cherchons l'expression d'une transformation issue d'un boost dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_1$ . La condition de simultanéité (4.11) s'écrit pour l'origine des deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  :

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2. \quad (4.21)$$

Posons

$$x'^0 = -x^1 \operatorname{sh} \eta + x^0 \operatorname{ch} \eta, \quad (4.22a)$$

$$x'^1 = x^1 \operatorname{ch} \eta - x^0 \operatorname{sh} \eta, \quad (4.22b)$$

où  $\eta$  est la *rapidité*, et vérifions que la forme imposée par les Eqs. (4.22) satisfait à la condition de simultanéité (4.21). Utilisant la propriété  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ , il est facile de voir que l'Eq. (4.21) est satisfaite. Ainsi il existe  $\eta$  tel que la transformation de Lorentz prenne la forme (4.22). Pour trouver la rapidité  $\eta$ , choisissons  $x'^1 = 0$  et  $v$  la vitesse de translation selon  $\hat{\mathbf{e}}_1$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . La coordonnée de l'origine de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$  est donc  $x^1 = vt$ , et l'Eq. (4.22b) fournit

$$\underbrace{0}_{=x'^1} = \underbrace{vt}_{=x^1} \operatorname{ch} \eta - \underbrace{ct}_{=x^0} \operatorname{sh} \eta, \quad (4.23)$$

d'où

$$\operatorname{th} \eta = \frac{v}{c} \doteq \beta. \quad (4.24)$$

Utilisant les propriétés des fonctions hyperboliques on obtient

$$\operatorname{ch} \eta \stackrel{(4.24)}{=} \operatorname{ch} \operatorname{argth} \beta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \doteq \gamma, \quad (4.25)$$

$$\operatorname{sh} \eta \stackrel{(4.24)}{=} \operatorname{sh} \operatorname{argth} \beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta\gamma. \quad (4.26)$$

Insérant les Eqs. (4.25) et (4.26) dans (4.22) il vient

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad (4.27a)$$

$$x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1). \quad (4.27b)$$

Sous forme matricielle, la transformation de Lorentz s'écrit donc

$$\boxed{x' = \mathbf{\Lambda} \cdot x, \quad \mathbf{\Lambda}(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad (4.28)$$

ou bien en composantes  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ . On vérifie que la transformation définie par (4.28) est bien un élément du groupe de Lorentz restreint, c'est-à-dire que  $\det \mathbf{\Lambda} = 1$  et que  $\Lambda^0_0 \geq 1$ . En gardant la forme (4.22) de la transformation en terme de la rapidité, il est aisé de vérifier la propriété de groupe. En effet, dans ce cas

$$\mathbf{\Lambda}(\eta) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \eta & -\operatorname{sh} \eta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh} \eta & \operatorname{ch} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

et on vérifie que :

1. Élément neutre : comme  $\operatorname{ch} 0 = 1$  et  $\operatorname{sh} 0 = 0$ , alors  $\mathbf{\Lambda}(\eta = 0) = \mathbb{1}$ .
2. Loi de composition : utilisant les propriétés

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad (4.30)$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y, \quad (4.31)$$

on vérifie que

$$\mathbf{\Lambda}(\eta_1) \cdot \mathbf{\Lambda}(\eta_2) = \mathbf{\Lambda}(\eta_1 + \eta_2). \quad (4.32)$$

3. Inverse : il suit des propriétés de symétrie  $\operatorname{ch}(-\eta) = \operatorname{ch} \eta$  et  $\operatorname{sh}(-\eta) = -\operatorname{sh} \eta$  que pour tout  $\mathbf{\Lambda}(\eta)$  la transformation inverse  $\mathbf{\Lambda}(\eta)^{-1} = \mathbf{\Lambda}(-\eta)$  existe.

Qu'en est-il de la loi d'addition des vitesses en relativité restreinte? De l'Eq. (4.32) on a

$$\mathbf{\Lambda}(\eta_1) \cdot \mathbf{\Lambda}(\eta_2) = \mathbf{\Lambda}(\eta_3), \quad \eta_3 = \eta_1 + \eta_2. \quad (4.33)$$

Or par définition (4.24) de la rapidité et utilisant la propriété

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + (\operatorname{th} x)(\operatorname{th} y)}, \quad (4.34)$$

on a

$$\beta_3 \stackrel{(4.24)}{=} \operatorname{th} \eta_3 \stackrel{(4.33)}{=} \operatorname{th}(\eta_1 + \eta_2) \stackrel{(4.34)}{=} \frac{\operatorname{th} \eta_1 + \operatorname{th} \eta_2}{1 + (\operatorname{th} \eta_1)(\operatorname{th} \eta_2)}, \quad (4.35)$$

d'où

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (4.36)$$

On remarque que la loi de composition des vitesses n'est plus la même en relativité que pour la mécanique de Galilée. En effet, selon l'Eq. (4.2) on aurait  $v_3 = v_2 + v_1$ . L'Eq. (4.36) montre que si l'une des vitesses,  $v_2$  par exemple, vaut  $c$ , alors  $v_3$  vaudra  $c$  quelle que soit la valeur de l'autre vitesse  $v_1$ .  $c$  apparaît donc comme une vitesse limite. Pour des vitesses non relativistes où  $v_1 v_2 / c^2$  est négligeable, on retrouve bien la loi de composition galiléenne  $v_3 = v_2 + v_1$ .

La loi (4.36) signifie que si un observateur est dans un référentiel  $\mathcal{R}''$ , et qu'un objet est émis à vitesse  $v_2$  relativement à un référentiel  $\mathcal{R}$  en mouvement à vitesse  $v_1$  par rapport à  $\mathcal{R}''$ , alors pour cet observateur l'objet émis aura la vitesse  $v_3$ . Par exemple, on peut considérer  $\mathcal{R}''$  comme étant le terrain depuis lequel un observateur regarde un train ( $\mathcal{R}$ ) passer à vitesse  $v_1$ . Un voyageur dans le train lance un objet ( $\mathcal{R}'$ ) à vitesse  $v_2$  (relative à la vitesse  $v_1$  du train) dans la direction du déplacement du train. Cet objet sera donc perçu comme ayant une vitesse  $v_3$  par l'observateur immobile en  $\mathcal{R}''$ .

Donnons l'expression du tenseur  $\Lambda$  dans le cas général d'une transformation de Lorentz issue de la composition de trois boosts, un dans chaque direction spatiale. Soit  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathbf{v}/c$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $\beta = |\beta|$ , alors

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Il suit de la propriété de groupe que la transformation (4.37) est un élément du groupe restreint. On peut donc aussi vérifier explicitement que  $\det \Lambda = 1$  et  $\Lambda^0_0 \geq 1$ .

### 4.4.3 Les quadrivecteurs

Comme la théorie se formule sur l'espace des événements de dimension 4, les grandeurs seront décrites par des objets dans  $\mathbb{R}^4$ , appelés *quadrivecteurs*.

**Définition 4.6** Soit  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^4$  l'espace de Minkowski, alors un **quadrivecteur**  $a \in \mathcal{M}$  est une grandeur qui lors d'un changement de référentiel se transforme soit de façon contravariante (cf. annexe A.8)

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}, \quad (4.38)$$

ou de façon covariante

$$a'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} a_{\nu}. \quad (4.39)$$

Comme montré dans l'annexe A.8, si  $a^{\mu}$  est contravariant et  $b_{\mu}$  covariant, alors  $a^{\mu} b_{\mu} = a^{\mu} g_{\mu\nu} b^{\nu}$  est un invariant. En particulier, pour tout quadrivecteur  $a$  on obtient l'invariant  $a^{\mu} a_{\mu}$ .

Le premier postulat de la relativité restreinte stipule la covariance des lois physiques (à ne pas confondre ici avec la propriété de covariance des quadrivecteurs, il s'agit de deux concepts différents qui portent le même nom), c'est-à-dire qu'elles gardent la même forme dans tous les référentiels. Le formalisme des quadrivecteurs est particulièrement bien adapté pour décrire ces propriétés covariantes. En effet, il suffira alors d'exprimer les lois physiques comme égalités entre quadrivecteurs. A titre d'illustration, rappelons la forme covariante des équations de l'électrodynamique en relativité restreinte.



**Exemple:** On définit le *quadrivecteur courant* par

$$\{J^\mu(x)\}_{\mu=0}^3 = (\rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)), \quad (4.40)$$

où  $\rho$  est la densité de charge de particules et  $\mathbf{j}$  le courant de charge des particules. On définit le *quadrivecteur potentiel* par

$$\{\mathcal{A}^\mu(x)\}_{\mu=0}^3 = (\psi(\mathbf{x}, t), c\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)), \quad (4.41)$$

où  $\psi$  est le potentiel électrostatique et  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur. Soit  $\chi(\mathbf{x}, t)$  une fonction scalaire quelconque, alors une *transformation de jauge* s'écrit

$$\tilde{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \chi(\mathbf{x}, t). \quad (4.42)$$

En particulier, la *jauge de Lorentz* prend la forme

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0. \quad (4.43)$$

Définissons le *tenseur des champs électromagnétiques*  $\mathcal{F}$  par

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = -\mathcal{F}_{\nu\mu}. \quad (4.44)$$

Les *équations de Maxwell* s'écrivent alors

$$\partial^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} J_\nu, \quad (4.45)$$

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} = 0, \quad \forall \lambda, \mu, \nu = 0, \dots, 3. \quad (4.46)$$

L'électrodynamique ainsi formulée est covariante relativiste. Pour plus de détails sur ce formalisme, voir [9, 20].  $\diamond$

#### 4.4.4 Les quadrivecteurs en cinématique relativiste

Nous désirons formuler les lois de la mécanique de façon covariante relativiste. Pour ceci, commençons par définir le référentiel tangent, le temps propre, ainsi que les quadrivecteurs position, vitesse, et accélération.

**Définition 4.7** Soit une particule de vitesse instantanée  $\mathbf{u}(t)$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . On définit alors pour tout temps  $t$  fixé le **référentiel tangent** (ou référentiel instantané de repos)  $\mathcal{R}'$  lié à cette particule par le référentiel dans lequel la particule est immobile (cf. Fig. 4.3). On définit le **temps propre**  $\tau$  par le temps qui s'écoule pour la particule immobile dans le référentiel tangent  $\mathcal{R}'$ .

La distance infinitésimale  $(ds)^2$  entre deux événements est

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2. \quad (4.47)$$

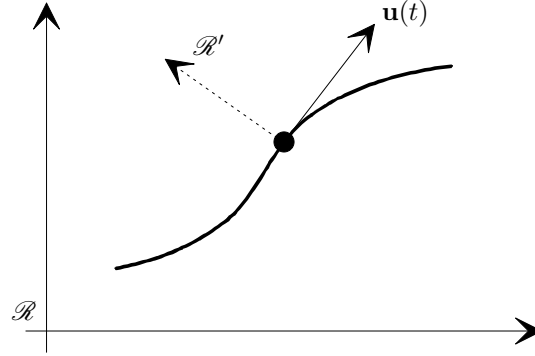
Or durant  $dt$  la position de la particule changera de  $d\mathbf{x} = \mathbf{u}dt$ , donc l'Eq. (4.47) devient

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2(1 - \beta^2), \quad (4.48)$$

où  $\beta = |\mathbf{u}|/c$ . Par définition du référentiel tangent  $\mathcal{R}'$ , la particule est au repos à l'origine donc  $d\mathbf{x}' = 0$  et  $dt' = d\tau$ . La distance entre deux événements étant un invariant, on a

$$\begin{aligned} c^2(d\tau)^2 &= c^2(dt)^2(1 - \beta^2) \\ \implies d\tau &= dt \underbrace{\sqrt{1 - \beta^2}}_{=1/\gamma}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Nous reviendrons sur l'interprétation du temps propre dans la Sect. 4.5.2.

FIG. 4.3 – Temps propre et référentiel tangent  $\mathcal{R}'$ .

**Définition 4.8** On définit le **quadrivecteur position** contravariant  $x^\mu$  par

$$x(\tau) = (ct(\tau), \mathbf{x}(t(\tau))). \quad (4.50)$$

**Définition 4.9** On définit le **quadrivecteur vitesse** contravariant  $u^\mu$  comme la dérivée par rapport au temps propre du quadrivecteur position :

$$u = \frac{d}{d\tau} x(\tau) \stackrel{(4.50)}{=} \left( c \frac{dt(\tau)}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}(t(\tau))}{d\tau} \right) = \underbrace{\frac{dt(\tau)}{d\tau}}_{\stackrel{(4.49)}{=} \gamma} \left( c, \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) = \gamma(c, \mathbf{v}). \quad (4.51)$$

**Définition 4.10** On définit le **quadrivecteur accélération** contravariant  $a^\mu$  comme la dérivée par rapport au temps propre du quadrivecteur vitesse :

$$a = \frac{du}{d\tau} \stackrel{(4.51)}{=} \left( c \frac{d\gamma}{d\tau}, \mathbf{v} \frac{d\gamma}{d\tau} + \gamma \frac{d\mathbf{v}(t(\tau))}{d\tau} \right) = \underbrace{\frac{dt(\tau)}{d\tau}}_{\stackrel{(4.49)}{=} \gamma} \left( c \frac{d\gamma}{dt}, \mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \underbrace{\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}}_{=\mathbf{a}} \right) = \gamma^4(\beta|\mathbf{a}|, \mathbf{a}), \quad (4.52)$$

où on a fait usage de la relation  $d\gamma/dt = \gamma^3\beta|\mathbf{a}|/c$ .

## 4.5 Cinématique : les conséquences physiques

Comme nous l'avons déjà vu par l'Eq. (4.36), la loi de transformation de la relativité restreinte diffère de la loi de Galilée. Examinons quelques autres conséquences [21]. Soulignons que ces conséquences peuvent a priori ne pas paraître intuitives. Ceci est dû au fait que dans notre vie quotidienne nous sommes habitués à raisonner dans un monde à trois dimensions où le temps et l'espace sont deux notions bien distinctes. Or par sa formulation dans l'espace de Minkowski des événements, la relativité restreinte enseigne que l'espace et le temps sont deux notions profondément intriquées, équivalentes.

### 4.5.1 Perte de simultanéité

Deux événements simultanés pour un observateur dans un référentiel  $\mathcal{R}$  ne sont plus simultanés pour un observateur dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement relatif à  $\mathcal{R}$ .

Pour illustrer la perte de simultanéité, prenons l'exemple d'un train se déplaçant à vitesse  $v$  sur une droite (par exemple de gauche à droite) avec à son bord trois voyageurs, un au milieu du train et les deux autres aux deux extrémités. Sur la terre ferme se trouve un observateur immobile, dont la position sur la droite au temps initial est la même que celle du voyageur au milieu du train. Supposons que la vitesse du train  $v$  soit proche de la vitesse de la lumière, de façon à ce que les effets relativistes ne soient plus négligeables. Au temps initial, le voyageur au milieu du train émet simultanément un rayon lumineux vers les deux autres voyageurs. Dans le référentiel du train, le voyageur au milieu constatera que le rayon lumineux atteint les deux voyageurs aux extrémités du train de façon simultanée. Il y a donc simultanéité des événements. Par contre, il n'en est pas de même dans le référentiel de l'observateur. La vitesse de la lumière étant invariante quel que soit la vitesse de la source émettrice, l'observateur verra que le voyageur en queue de train sera atteint *avant* celui en tête de train. En effet, les deux voyageurs ont alors encore une vitesse propre  $v$  avançant ou retardant le moment auquel le rayon lumineux les atteindra. Pour bien comprendre la différence avec la loi classique d'addition des vitesses, examinons le cas où une onde sonore de vitesse  $u$  non relativiste est émise, non plus un rayon lumineux. Dans le référentiel du train il est clair que l'onde atteindra les deux extrémités simultanément. Dans le référentiel de l'observateur, l'onde se déplace vers la gauche à vitesse  $v - u$  et vers la droite à vitesse  $v + u$ . Mais le voyageur de gauche semble se rapprocher de l'onde à vitesse  $v$  tandis que celui de droite semble s'éloigner à vitesse  $v$ . Ainsi il y a compensation des vitesses et les deux voyageurs sont atteints simultanément. Nous voyons donc qu'un mouvement relatif (relativiste) engendre la perte de la notion de simultanéité. Deux événements qui se passent en même temps dans un référentiel peuvent ne plus être simultanés dans un autre référentiel.

### 4.5.2 Dilatation du temps

Reprenons l'Eq. (4.49) pour le temps propre :

$$dt = \gamma d\tau, \quad (4.53)$$

d'où comme  $\gamma \geq 1$  par intégration il vient  $\Delta t \geq \Delta \tau$ . Comme  $\tau$  est le temps propre dans le référentiel de la particule  $\mathcal{R}'$ , alors on en déduit que pour un intervalle temporel  $\Delta \tau$ , l'intervalle  $\Delta t$  perçu dans  $\mathcal{R}$  est plus grand. Une horloge qui se déplace dans un référentiel inertiel par rapport à un observateur immobile apparaîtra comme fonctionnant moins vite qu'une horloge identique dans le référentiel immobile.

Ce résultat est illustré par l'exemple du méson pi, ce qui constitue d'ailleurs l'une des confirmations historiques de la relativité. Le méson pi est une particule produite naturellement par le soleil, et qui possède une courte durée de vie. On est capable de détecter à la surface de la terre de telles particules issues du soleil. Un calcul classique est en contradiction avec cette observation expérimentale car la durée de vie du méson pi est tellement petite que cela ne lui permettrait pas d'atteindre notre planète. Le fait que ces particules atteignent la surface de notre planète s'explique par la dilatation du temps : le temps dans le référentiel de la particule s'écoule plus lentement de sorte à ce que sa durée de vie en soit suffisamment rallongée pour lui permettre d'atteindre la terre.

### 4.5.3 Contraction des longueurs

Considérons l'événement  $x' = (0, L', 0, 0)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant dans la direction  $\hat{e}_1$  à vitesse  $u$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Il s'agit par exemple d'un train de longueur  $L'$ .

La transformation de Lorentz (4.27b) donne

$$L' = \gamma(-\beta x^0 + x^1). \quad (4.54)$$

Nous désirons trouver quelle est la longueur  $L$  mesurée dans  $\mathcal{R}$ . Pour ceci, la mesure doit se faire en des temps égaux, c'est-à-dire  $x^0 = 0$ . Notant alors  $x^1 = L$ , l'Eq. (4.54) devient

$$L' = \gamma L, \quad (4.55)$$

d'où  $L' \geq L$  car  $\gamma \geq 1$ . Ainsi le train apparaît plus court dans le référentiel immobile  $\mathcal{R}$ . Un objet dans un référentiel inertiel en mouvement par rapport à un observateur immobile va apparaître plus court à l'observateur immobile (plus court que pour un observateur se déplaçant avec l'objet).

Ce résultat est aussi connu sous le nom de *contraction de Fitzgerald-Lorentz*.

## 4.6 Dynamique relativiste

Disposant des définitions nécessaires des quadrivecteurs en cinématique relativiste, il est à présent possible de décrire la situation dynamique. Ceci conduira aux concepts d'impulsion, d'énergie, et de force relativiste. Les lois devant être covariantes relativistes, le problème consiste à trouver comment ces grandeurs se transforment lors d'un changement de référentiel. Il est possible, à partir d'arguments très généraux, de déduire ces transformations. Nous nous contentons d'induire ces résultats en faisant intervenir l'expérience.

### 4.6.1 Énergie et impulsion

En mécanique newtonienne, on a la loi  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = m d\mathbf{u}/dt$ , où  $m$  est la masse de la particule et  $\mathbf{u}$  sa vitesse par rapport au référentiel d'observation  $\mathcal{R}$ . L'expérience montre (Kaufmann (1901), Bucherer (1909), et Guye et Lavanchy (1915)) que si  $|\mathbf{u}|$  est grand, alors la loi de Newton reste vraie à condition de remplacer la masse au repos  $m_0$  (i.e., lorsque la particule est attachée au référentiel  $\mathcal{R}$ ) par

$$m = \gamma m_0. \quad (4.56)$$

La quantité de mouvement vaudra donc

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{u}. \quad (4.57)$$

Soit  $\delta E$  le travail nécessaire pour que la particule soumise à une force  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  acquiert une vitesse  $\mathbf{u}$  le long de sa trajectoire  $d\mathbf{l} = \mathbf{u} dt$ , alors

$$\delta E = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} dt = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{p}. \quad (4.58)$$

On développe le membre de droite de l'Eq. (4.58) pour obtenir

$$\delta E = m_0 \gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} + m_0 u^2 d\gamma, \quad (4.59)$$

qui avec la relation  $d\gamma = \gamma^3 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}/c^2$  devient

$$\delta E = m_0 c^2 d\gamma. \quad (4.60)$$

En faisant usage de l'Eq. (4.56), l'énergie totale s'écrit donc sous la forme bien connue

$$E = mc^2. \quad (4.61)$$

Ceci mène à la définition d'une grandeur fondamentale en dynamique relativiste.

**Définition 4.11** Soit  $E = \gamma m_0 c^2$  l'énergie totale d'une particule,  $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{u}$  son impulsion, alors on définit le **quadrivecteur énergie-impulsion** contravariant  $P^\mu$  par

$$P = (E, c\mathbf{p}). \quad (4.62)$$

**Remarques:**

1. Dans la limite newtonienne  $|\mathbf{u}| \ll c$ , le développement de Taylor du quadrivecteur énergie-impulsion autour de  $|\mathbf{u}|/c = 0$  donne :

$$P = (m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 |\mathbf{u}|^2, m_0 \mathbf{u}) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^3). \quad (4.63)$$

Il s'agit bien des expressions classiques de l'énergie et de l'impulsion, à la différence de la présence de l'énergie de masse au repos  $E_0 = m_0 c^2$  (équivalence masse-énergie).  $T = (\gamma - 1) m_0 c^2 = m_0 |\mathbf{u}|^2 / 2 + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^3)$  est l'énergie cinétique, dont le développement de Taylor au premier ordre est analogue à l'expression classique.

2. Prenant la norme au carré du quadrivecteur énergie-impulsion  $P$  il vient :

$$P^2 = P^\mu P_\mu = P^\mu g_{\mu\nu} P^\nu = E^2 - c^2 |\mathbf{p}|^2. \quad (4.64)$$

Dans le référentiel tangent  $\mathcal{R}'$  attaché à la particule, la norme du quadrivecteur s'écrit

$$P'^2 = E_0^2 = m_0^2 c^4. \quad (4.65)$$

$P$  étant un quadrivecteur, alors par définition  $P^2$  est un invariant. On peut donc évaluer les normes (4.64) et (4.65) :

$$\boxed{E^2 - c^2 |\mathbf{p}|^2 = m_0^2 c^4}. \quad (4.66)$$

En particulier, pour une particule de masse nulle (par exemple des photons), cette dernière relation fournit

$$E = c |\mathbf{p}|. \quad (4.67)$$

◇

## 4.6.2 La force relativiste

Nous désirons établir une formulation quadrivectorielle qui préserve la structure formelle de l'équation de Newton.

**Définition 4.12** Soit  $u$  le quadrivecteur vitesse, alors on définit le **quadrivecteur impulsion** contravariant  $p^\mu$  par

$$p = m_0 u = m_0 \gamma(c, \mathbf{v}). \quad (4.68)$$

**Définition 4.13** Soit  $P$  le quadrivecteur énergie-impulsion,  $\mathbf{F}$  les forces externes agissant sur la particule, alors on définit le **quadrivecteur force** contravariant  $F^\mu$  par

$$F = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} P \stackrel{(4.62)}{=} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (E, c\mathbf{p}) = \left( \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \underbrace{\frac{d\mathbf{p}}{dt}}_{=\mathbf{F}} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \mathbf{F} \right). \quad (4.69)$$

Les équations du mouvement sont alors données par :

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{dt}. \quad (4.70)$$

En effet, pour  $\mu = 1, \dots, 3$  l'Eq. (4.70) donne bien l'équivalent de l'équation de Newton  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ , où la masse au repos  $m_0$  est remplacée par sa *masse effective*  $m = \gamma m_0$ . Pour  $\mu = 0$  on a  $dE/dt = d(\gamma m_0 c^2)/dt$ , ce qui est en accord avec l'Eq. (4.61). Remarquons qu'on peut aussi écrire les équations du mouvement (4.70) en fonction du temps propre comme  $F^\mu = dp^\mu/d\tau$ , écriture parfois utilisée dans la littérature. Cependant, dans ce cas la force est définie par  $F \doteq \gamma F$ . En effet, on voit alors immédiatement en utilisant  $d/d\tau = \gamma d/dt$  que l'on obtient bien les Eqs. (4.70).

**Remarque:** dans le cas relativiste, l'accélération n'est pas colinéaire à la force appliquée. En effet, prenons l'exemple en deux dimensions d'une particule de masse  $m_0$  qui se déplace initialement selon la direction  $\hat{\mathbf{e}}_1$  avec vitesse  $v_0$ . On lui impose en  $t = 0$  une force  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$  (cf. Fig. 4.4). On peut alors montrer de l'Eq. (4.70) que son accélération en  $t = 0$  est

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_0 \gamma} \begin{pmatrix} \gamma^{-2} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

où  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) = d\mathbf{v}/dt$  est l'accélération de la particule et  $\gamma = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ .

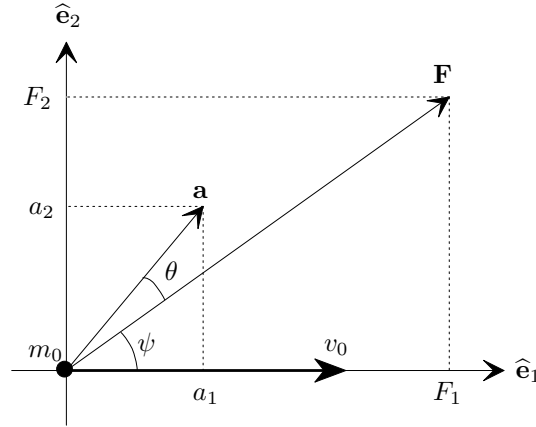


FIG. 4.4 – Force et accélération relativistes.

On peut trouver l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{a}$ . Comme  $\text{tg } \psi = F_2/F_1$  et  $\text{tg}(\psi + \theta) = a_2/a_1$ , alors

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{a_2}{a_1} \right) - \text{arctg} \left( \frac{F_2}{F_1} \right). \quad (4.72)$$

Insérant l'Eq. (4.71) dans (4.72) il vient

$$\theta = \text{arctg} \left( \gamma^2 \frac{F_2}{F_1} \right) - \text{arctg} \left( \frac{F_2}{F_1} \right). \quad (4.73)$$

Donc comme  $\gamma > 1$  si  $v_0 > 0$ , on voit que  $\theta > 0$ . Ainsi, l'accélération n'est jamais exactement parallèle à la force. Néanmoins pour des vitesses non relativistes, elles peuvent en très bonne approximation être considérées colinéaires. Par exemple, si  $v_0 = 10^5$  km/h et  $F_1 = F_2$ , l'Eq. (4.73) donne  $\theta = 4 \times 10^{-9}$  rad.  $\diamond$

## 4.7 L'approche lagrangienne\*

Ayant généralisé les équations du mouvement au cas relativiste, nous développons à présent le formalisme lagrangien associé. L'approche la plus simple consiste à trouver un lagrangien qui conduit aux équations relativistes du mouvement en terme des coordonnées d'un système inertiel particulier. En accord avec le principe de Hamilton, on cherche une fonction  $L$  qui rend l'action stationnaire de façon à ce que les équations de Lagrange reproduisent  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ . Notons encore que la présentation qui suit ne se veut pas formelle et rigoureuse. Ces sujets sont abordés plus en détail dans des cours spécialisés [22].

Nous avons vu que les équations de Lagrange sont celles qui extrémalisent la fonctionnelle

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L. \quad (4.74)$$

C'est-à-dire en introduisant le temps propre  $\gamma$  par la relation  $dt = \gamma d\tau$  :

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \gamma L. \quad (4.75)$$

Les équations du mouvement devant être covariantes relativistes, il faut qu'il en soit de même de l'action  $S$ , et par conséquent de l'intégrand  $\gamma L$ . Considérons d'abord le cas d'une particule libre. Dans ce cas, par homogénéité de l'espace le lagrangien ne peut dépendre que de la vitesse et de la masse de la particule, mais pas de sa position. Le seul invariant relativiste que l'on peut construire à l'aide des vitesses est  $u^\mu u_\mu = u^\mu g_{\mu\nu} u^\nu = \gamma^2(c^2 - |\mathbf{v}|^2) = c^2$ . Par conséquent, pour que  $\gamma L$  soit un invariant il faut que  $L$  soit proportionnel à  $\gamma^{-1}$ . Ainsi, comme de plus  $L$  a les dimensions d'une énergie

$$L = -\frac{1}{\gamma} m_0 c^2, \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = |\mathbf{v}|/c, \quad (4.76)$$

où  $m_0$  est la masse au repos ajoutée pour des raisons dimensionnelles, et  $c^2 = u^\nu u_\nu$ . Cette forme du Lagrangien est manifestement covariante relativiste. Si la particule est plongée dans un potentiel  $V(\mathbf{x})$ , alors on peut montrer que le Lagrangien devient

$$L = -\frac{1}{\gamma} m_0 c^2 - V. \quad (4.77)$$

Ceci provient du fait que les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (4.78)$$

redonnent  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ . En effet

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = m_0 c^2 \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial v^i} = \gamma m_0 v^i = p^i, \quad (4.79)$$

et donc les Eqs. (4.78) donnent

$$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} = F^i. \quad (4.80)$$

La même dérivation peut être étendue au cas où le système est formé de plusieurs particules décrites à l'aide de coordonnées généralisées  $q_i$ . Le moment conjugué à  $q_i$  sera toujours donné par

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (4.81)$$

L'extension à un potentiel généralisé dépendant des vitesses se traite de la même manière que dans le cas classique. Ainsi, le lagrangien d'une particule relativiste soumise à un champ électromagnétique sera

$$L = -\frac{1}{\gamma}m_0c^2 - e\phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.82)$$

$\phi$  et  $\mathbf{A}$  étant respectivement les potentiels scalaires et vectoriels, et  $e$  la charge de la particule. Le moment conjugué est alors  $p^i = m_0v^i + qA^i$ .

La forme (4.82) permet l'étude des trajectoires de particules relativistes soumises à des champs électromagnétiques (physique des accélérateurs). Cette formulation n'est cependant pas complètement satisfaisante, car elle n'est pas covariante relativiste et donc ne possède pas de propriété particulière sous une transformation de Lorentz. Il est naturellement souhaitable d'obtenir des équations manifestement covariantes. Il s'agit d'un problème difficile, qui ne sera pas abordé dans le contexte de ce cours. Une formulation covariante est possible dans certains cas :

- Si le système est formé de particules libres.
- Si les particules sont en interaction par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique uniquement.

La formulation covariante n'est pas réalisable dans le cas d'interactions quelconques. La construction de cette formulation se fait en cherchant un lagrangien covariant  $L(x^\mu, v^\mu)$  tel que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3. \quad (4.83)$$

soit équivalent aux équations du mouvement (4.70) dans le formalisme des quadri-vecteurs. Ainsi, il s'agit d'une formulation dans l'espace de Minkowski, et non plus dans l'espace euclidien usuel. Pour plus de détails sur le sujet, on renvoie à l'annexe A.9 ou aux références [15, 20].

## 4.8 L'approche hamiltonienne\*

Le même problème concernant la formulation covariante se pose si on désire élaborer un formalisme hamiltonien relativiste. La difficulté d'une description manifestement covariante sur l'espace de Minkowski étant encore plus grande que dans le cas lagrangien, nous restreignons la discussion qui suit au cas non covariant, c'est-à-dire à une description dans un référentiel inertiel donné. Ainsi, la variable temporelle ne sera pas traitée comme l'une parmi les quatre coordonnées généralisées sur l'espace de Minkowski, mais bien comme le paramètre d'évolution distinct.

Considérons à nouveau le cas d'une particule dans un potentiel autonome indépendant des vitesses. Selon l'Eq. (4.77) son lagrangien est

$$L = -\frac{1}{\gamma}m_0c^2 - V(\mathbf{q}), \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1}, \quad \beta = |\dot{\mathbf{q}}|/c. \quad (4.84)$$

De plus, nous avons vu que

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{m_0 \dot{q}^i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_0 \gamma \dot{q}^i. \quad (4.85)$$

Introduisons la transformée de Legendre de  $L$  de façon similaire au cas classique :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i(\mathbf{p}) p^i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})). \quad (4.86)$$



Utilisant les Eqs. (4.84) et (4.85) dans (4.86) il vient

$$H = \sum_{i=1}^3 m_0 \gamma \dot{q}^i \dot{q}^i + m_0 \underbrace{\frac{1}{\gamma} c^2}_{=\gamma(c^2 - \dot{\mathbf{q}}^2)} + V(\mathbf{q}) = m_0 \gamma c^2 + V(\mathbf{q}) = T + \tilde{V}, \quad (4.87)$$

où l'énergie cinétique  $T$  est définie par

$$T = m_0 c^2 (\gamma - 1), \quad (4.88)$$

et l'énergie potentielle par

$$\tilde{V} = m_0 c^2 + V(\mathbf{q}). \quad (4.89)$$

Le premier terme de l'Eq. (4.89) décrit l'énergie de masse au repos de la particule (qui est une forme d'énergie potentielle par l'équivalence entre la masse et l'énergie), tandis que le second représente l'énergie du potentiel autonome. L'Eq. (4.88) est la forme relativiste de l'énergie cinétique, qui au premier ordre en  $|\dot{\mathbf{q}}|/c$  est bien  $m_0 |\dot{\mathbf{q}}|^2/2$ . Ainsi, pour un potentiel autonome indépendant des vitesses généralisées, l'hamiltonien  $H$  est conservé et représente l'énergie totale.

L'expression de l'hamiltonien en fonction des moments conjugués se trouve à l'aide de l'Eq. (4.66) :

$$T^2 = c^2 |\mathbf{p}|^2 + m_0 c^4, \quad (4.90)$$

d'où

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \left( c^2 \sum_{i=1}^3 (p^i)^2 + m_0^2 c^4 \right)^{1/2} + V(\mathbf{q}), \quad (4.91)$$

et de façon similaire au cas classique les équations canoniques de Hamilton sont

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad (4.92a)$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (4.92b)$$

Pour une particule de charge  $e$  dans un champ électromagnétique le terme additionnel a la même forme que dans le cas classique (cf. Sect. 2.3.4.1) :

$$L = -\frac{1}{\gamma} m_0 c^2 + q \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}} - e \phi. \quad (4.93)$$

Ainsi  $p^i = m \dot{q}^i + e A^i$  et de l'Eq. (4.90)

$$T^2 = (\mathbf{p} - e \mathbf{A})^2 + m_0 c^2, \quad (4.94)$$

d'où

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = (c^2 (\mathbf{p} - e \mathbf{A})^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} + e \phi. \quad (4.95)$$

En particulier, les équations de Lagrange fournissent l'équation du mouvement de la particule chargée relativiste en présence d'un champ électromagnétique

$$\frac{d}{dt} (m_0 \gamma \dot{\mathbf{q}}) = e (\mathbf{q} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}), \quad (4.96)$$

où  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  et  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi$ . L'Eq. (4.96) a la même forme que son analogue classique, à condition de remplacer la masse au repos  $m_0$  par la masse effective  $m_0 \gamma$ .



## Chapitre 5

# Mécanique des milieux continus et déformables

### 5.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons considéré la dynamique d'une quantité dénombrable d'objets de masse  $m_i$  en interaction. Ces objets étaient rigides et non déformables. Une telle approche n'est néanmoins pas adaptée à la description de systèmes constitués d'un grand nombre de particules interagissant fortement, typiquement les solides ou les fluides. Dans ces cas on est intéressé à une description macroscopique de l'état du système plutôt qu'à la connaissance de la dynamique individuelle de chacun de ses constituants. On est conduit à décrire la physique de tels systèmes en termes de champs classiques  $A(\mathbf{x}, t)$ , variant continuellement dans l'espace.

Dans un premier paragraphe nous illustrons la démarche du passage du discret au continu à l'aide de l'exemple simple de chaîne élastique à une dimension, conduisant à la formulation lagrangienne du problème continu. Puis, les propriétés élastiques et visqueuses des corps sont discutées phénoménologiquement. Les concepts de tenseurs des tensions et des déformations sont introduits. La théorie linéaire des relations entre contraintes et déformations est établie. Ces concepts sont illustrés par l'étude de la propagation des ondes élastiques dans un milieu homogène.

### 5.2 Un modèle de chaîne élastique

Ce modèle simple va nous montrer quels sont les concepts qu'il faut introduire pour décrire la mécanique d'un milieu élastique continu. Considérons une chaîne (unidimensionnelle) de masses ponctuelles reliées par des ressorts harmoniques (cf. Fig. 5.1).

On décrit d'abord la dynamique du système au niveau microscopique, puis l'on constatera que dans une certaine limite la dynamique de la chaîne se réduit à une équation d'onde pour la densité locale.

Soient  $N + 2$  particules de masse  $m$  reliées par des ressorts de constante de rappel harmonique  $k$  et de longueur au repos  $a$ . Soit  $x_i^0$  la position d'équilibre de la particule  $i$ , et  $x_i(t)$  sa position au temps  $t$ . Notons  $q_i(t) = x_i(t) - x_i^0$  et fixons les particules aux extrémités de la chaîne  $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$ . D'autre part, nous supposons que les

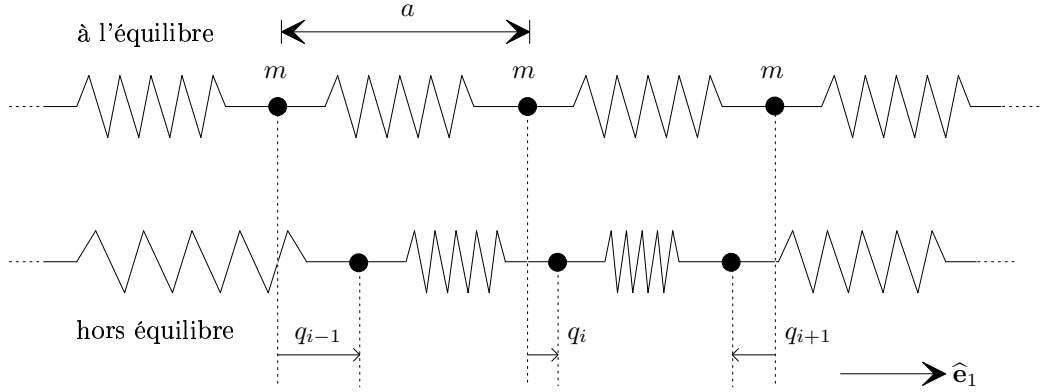


FIG. 5.1 – Modèle de chaîne élastique.

déformations  $q_i$  sont petites devant  $a$ . L'énergie cinétique du système vaut

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^N \dot{q}_i^2. \quad (5.1)$$

Pour trouver l'énergie potentielle, on constate que la longueur du ressort  $i$  au repos est  $L_i^0 = a = x_{i+1}^0 - x_i^0$ . Sa longueur au temps  $t$  est  $L_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$ . Ainsi, son écart à l'équilibre au temps  $t$  est

$$\Delta L_i(t) = L_i(t) - L_i^0 = x_{i+1}(t) - x_{i+1}^0 - x_i(t) + x_i^0 = q_{i+1}(t) - q_i(t). \quad (5.2)$$

Le ressort étant supposé harmonique, la force  $F$  est linéaire dans l'écart  $L_i(t)$ . Pour trouver le signe de la force, supposons que  $q_i(t) = 0$  en un temps donné. Donc si  $q_{i+1}(t) > 0$  le ressort est allongé et donc la force doit être dans la direction  $-\hat{e}_1$ . Si  $q_{i+1}(t) < 0$  le ressort est comprimé et la force est orientée selon  $+\hat{e}_1$ . Ceci mène donc à l'énergie potentielle pour le ressort  $i$  :

$$V_i = \frac{1}{2}k (q_{i+1} - q_i)^2. \quad (5.3)$$

L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielles de chaque ressort

$$V = \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^N (q_{i+1} - q_i)^2. \quad (5.4)$$

Des Eqs. (5.1) et (5.4) le lagrangien s'écrit

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^N \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^N (q_{i+1} - q_i)^2. \quad (5.5)$$

En constatant que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = m\dot{q}_j, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_j} &= -k \sum_{i=0}^N (q_{i+1} - q_i) \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_j} (q_{i+1} - q_i)}_{=\delta_{j,i+1} - \delta_{j,i}} \\ &= -k(q_j - q_{j-1}) + k(q_{j+1} - q_j) \\ &= k(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Les équations de Lagrange sont donc

$$m\ddot{q}_i - k(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.8)$$

Considérons à présent le processus de limite macroscopique dans lequel on assimile la chaîne discrète à un système continu. Pour cela il faut que la distance de séparation des particules soit suffisamment faible, c'est-à-dire  $a$  petit. On considère alors la densité de masse par unité de longueur  $m/a$ , et suppose que dans la limite macroscopique la grandeur

$$\rho = \lim_{\substack{m \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 0}} \frac{m}{a} \quad (5.9)$$

prend une valeur finie. De plus, nous constatons de l'Eq. (5.8) que  $k$  possède les unités d'une force par unité de longueur, donc  $ka$  possède les unités d'une force. Comme nous le verrons plus loin, il existe une loi phénoménologique appelée *loi de Hooke* selon laquelle la force  $F = E\Delta L/L$ , où  $\Delta L$  est un allongement,  $L$  la longueur au repos, et  $E$  un *module d'élasticité* appelé *module de Young*. Ce dernier décrit les propriétés macroscopiques d'élasticité d'un matériau. Ainsi,  $ka$  a aussi les dimensions d'un module d'élasticité et nous supposons à nouveau l'existence de la limite

$$\mu = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} ka. \quad (5.10)$$

La limite  $k \rightarrow \infty$  doit être prise afin que  $\mu$  soit fini dans la limite continue. En divisant l'Eq. (5.8) par  $a$  on obtient

$$\frac{m}{a}\ddot{q}_i - ka \frac{q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}}{a^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

Définissons le champ continu  $q(x)$  par  $q_i = q(x = ia)$ . En supposant que  $q(x)$  varie peu sur une distance de l'ordre de  $a$ , alors le second terme du membre de gauche de l'Eq. (5.11) est la formule des différences centrées pour la dérivée seconde (cf. annexe A.10). Dans la limite macroscopique le déplacement discret  $q$  devient un champ continu  $q(x, t)$  et les Eqs. (5.9) et (5.10) dans (5.11) fournissent

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} q(x, t) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) = 0. \quad (5.12)$$

Définissons  $u = \sqrt{\mu/\rho}$ , alors  $u^2$  a les dimensions d'une force divisée par une densité linéaire de masse, c'est-à-dire les dimensions du carré d'une vitesse. Par conséquent,  $u$  est une vitesse et l'Eq. (5.12) devient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} q(x, t) - u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) = 0, \quad (5.13)$$

ce qui est une *équation d'onde*,  $u$  étant la vitesse de propagation de l'onde (cf. Sect. 5.8.1).

Ce résultat final correspond bien aux observations expérimentales où une perturbation locale de densité (par exemple un coup de marteau à l'extrémité d'une barre rigide) donne lieu à une onde de densité (ou une onde sonore) parcourant le milieu à une certaine vitesse.

L'équation d'onde peut être généralisée à trois dimensions, où alors  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x_1, x_2, x_3, t)$ , et l'équation d'évolution prend la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - u^2 \Delta \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (5.14)$$

où le laplacien  $\Delta$  est défini par  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . On parle d'une théorie de champs classique.

Il est possible de développer une formulation lagrangienne pour les systèmes continus. Dans ce cas le lagrangien du système s'obtient par intégration sur les variables spatiales  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  d'une *densité lagrangienne*  $\mathcal{L}$  :

$$L = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{q}, \partial_t\mathbf{q}, \mathbf{x}, t). \quad (5.15)$$

Pour le système unidimensionnel étudié ci-dessus, la densité lagrangienne est (cf. Sect. 5.3)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho u^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2. \quad (5.16)$$

### 5.3 Formulation lagrangienne pour les systèmes continus

Le but de cette section est de montrer que le formalisme lagrangien se transpose de façon naturelle à une théorie des milieux continus. Ceci doit permettre d'insister, à l'instar de l'exemple de la chaîne continue de la section précédente, sur le lien étroit qui existe entre les descriptions discrètes et continues.

Considérons un système de dimension une, et notons le champ continu  $q(x, t)$ . De l'Eq. (5.15) on voit que la densité lagrangienne dépend des dérivées  $\partial_t q$ ,  $\partial_x q$ , ainsi que de  $x$  et  $t$  qui apparaissent comme des paramètres jouant un rôle équivalent. S'il existe des forces locales, alors la densité lagrangienne dépend aussi explicitement de  $q$ , et dans le cas général il en est de même pour  $x$  et  $t$ . Ainsi

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial t}, x, t\right). \quad (5.17)$$

Le lagrangien s'obtient de sa densité  $\mathcal{L}$  par intégration sur l'ensemble des positions  $x$  accessibles au système. La généralisation directe du principe de Hamilton au cas continu s'écrit

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L}\left(q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial t}, x, t\right) = 0. \quad (5.18)$$

Pour exploiter correctement le principe de Hamilton, il faut que l'Eq. (5.18) redonne la limite continue des équations du mouvement, par exemple l'Eq. (5.13). Ceci est possible par un calcul variationnel qui n'est que très légèrement différent de celui du cas discret. La variation ne sera faite que sur  $\eta$  et ses dérivées, sans affecter les paramètres  $x$  et  $t$ . Comme pour le cas discret (cf. Sect. A.2), on paramétrise l'écart à la solution  $q(x, t)$  par une perturbation  $\eta(x, t)$  régulière

$$q(x, t, \lambda) = q(x, t) + \lambda\eta(x, t), \quad (5.19)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est un paramètre continu caractérisant l'amplitude de la perturbation. A nouveau  $\eta(x, t_1) = \eta(x, t_2) = 0 \forall x$ . De plus nous imposons  $\eta(x_1, t) = \eta(x_2, t) = 0 \forall t$ . Les extremums de  $I$  sont donnés par la condition

$$\left. \frac{dI}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad (5.20)$$

ce qui s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\lambda} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dq}{dt}} \frac{\partial \frac{dq}{dt}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dq}{dx}} \frac{\partial \frac{dq}{dx}}{\partial \lambda} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Comme la variation  $\eta$  s'annule aux bords des domaines d'intégration sur  $x$  et  $t$ , alors une intégration par parties fournit les relations (les domaines ainsi que le lagrangien étant supposés bornés, alors on peut échanger l'ordre des intégrations sur  $x$  et  $t$ )

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} \frac{\partial q}{\partial t} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} \right) \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (5.22)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \frac{\partial q}{\partial x} = - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right) \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (5.23)$$

Insérant les Eqs. (5.22) et (5.23) dans (5.21) il vient

$$\frac{dI}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right) \right] \frac{\partial q}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0. \quad (5.24)$$

Cette relation étant vraie pour toute perturbation  $\eta(x, t)$ , l'intégrand de l'Eq. (5.24) s'annule, fournissant ainsi les équations de Lagrange pour un système continu :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0.} \quad (5.25)$$

Il s'agit à présent d'une équation différentielle aux dérivées partielles pour le champ  $q(x, t)$ .

Pour illustrer l'Eq. (5.25), reprenons la densité lagrangienne (5.16) de la chaîne harmonique. Dans ce cas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} = \rho \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (5.26a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} = -\rho u^2 \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (5.26b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (5.26c)$$

Les Eqs. (5.26) dans (5.25) redonnent ainsi (5.13).

La généralisation de l'Eq. (5.25) à plusieurs dimensions se réalise de façon similaire à l'établissement de (5.25). Pour plus de détails sur ce formalisme, voir [15].

## 5.4 Généralités sur les corps élastiques

Lorsque l'on soumet un système matériel (solide, liquide ou gaz) à des forces extérieures ou des couples extérieurs constants ou dépendants du temps, on est intéressé par la réponse en fonction du temps de grandeurs caractéristiques telles que longueurs, aires, volumes et angles. Les résultats expérimentaux mettent en évidence trois propriétés fondamentales de la *rhéologie* (étude du comportement mécanique des matériaux par les lois liant les contraintes aux déformations) des systèmes matériels : *élasticité*, *viscosité* et *plasticité* [23, 24]. Il convient aussi de ne pas oublier le cas des matériaux dont les propriétés évoluent au cours du temps en l'absence de toute action extérieure (phénomène de vieillissement) tels par exemple les verres ou le béton (dont la prise lente du ciment augmente la résistance). Si ces perturbations extérieures sont suffisamment petites on peut

les décrire par des lois linéaires, ce qui sera l'objet de notre présentation. De plus, ces mécanismes de déformations s'accompagnent de manière générale d'effets thermiques. Une description complète devraient ainsi prendre place dans le cadre de la thermodynamique (ou mécanique statistique) des *processus irréversibles* [25].

Lorsqu'on reporte les déformations en fonction des forces ou des couples appliqués et que la courbe de décharge coïncide exactement avec la courbe de charge, on dit qu'il y a élasticité (processus réversible). Dans le cas contraire, on observe une déformation permanente appelée déformation plastique (processus irréversible). La Fig. 5.2 représente le résultat d'une expérience au cours de laquelle un barreau cylindrique est soumis à une force de traction (la contrainte). On mesure la déformation du barreau en fonction de la force appliquée, et reporte sur un graphique la relation entre déformation et contrainte. Une fois la contrainte maximale atteinte, celle-ci est relaxée. Il en résulte un diagramme donnant la contrainte en fonction de la déformation, appelé *courbe de traction*.

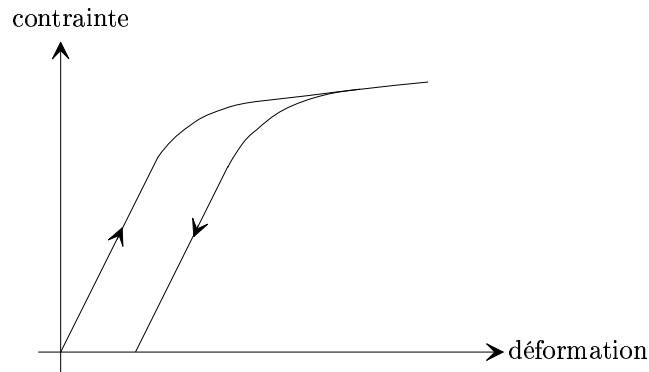


FIG. 5.2 – Courbe de traction.

Pour de faibles forces appliquées, la relation entre force et déformation est une bijection. Elle n'est pas forcément linéaire. Cependant, le comportement élastique linéaire est une bonne approximation pour la plupart des solides sous contraintes suffisamment faibles. Du point de vue thermodynamique, le comportement élastique représente une transformation réversible. Microscopiquement, l'élasticité des solides est due aux liaisons interatomiques qui ne sont pas détruites par la faible contrainte imposée. Si la contrainte est telle que ces liaisons sont modifiées, alors la déformation est plastique et donc irréversible : en relâchant la contrainte le matériau ne revient pas dans son état initial.

Pour décrire l'équilibre d'un corps élastique, il faut tout d'abord établir les relations entre les forces appliquées et les déformations. Dans le cas général la relation linéaire entre les tensions appliquées et les déformations est anisotrope et dépend du temps car décrit une situation d'équilibre local (c'est-à-dire en chaque point de l'espace).

Prenons par exemple le cas d'un barreau parallélépipédique sur lequel on applique une force de traction longitudinale en ses deux extrémités (cf. Fig. 5.3).

Dans le régime élastique, l'allongement du barreau sera proportionnel à la force appliquée. De plus, le barreau se contracte dans les directions transverses. Lors d'une telle déformation réversible apparaissent des ondes élastiques longitudinales et transverses caractérisées par une certaine vitesse de propagation. Comment décrire ces phénomènes ?

Un autre type de systèmes mécaniques de grand intérêt sont les fluides, c'est-à-dire les gaz et liquides usuels. Il y a plusieurs niveaux de description possible de la dynamique des fluides.



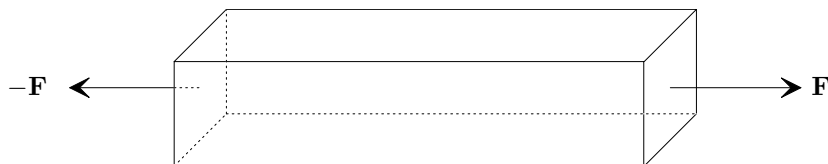


FIG. 5.3 – Déformation d'un barreau parallélépipédique.

**Approche microscopique :** un fluide est formé d'un grand nombre de particules indéformables, par exemples des molécules, qui interagissent entre elles ainsi qu'avec des forces extérieures. Un tel système peut donc être décrit par les équations canoniques de Hamilton. La difficulté provient néanmoins du grand nombre de particules en interaction (une môle contient environ  $10^{23}$  molécules), et donc il n'est en général pas possible d'intégrer les équations du mouvement. De nouveaux outils doivent être introduits pour décrire de tels systèmes : ceux de la *mécanique statistique du non-équilibre*. Cette théorie permet d'aborder le problème de l'irréversibilité. Bien que la microdynamique soit réversible (équations de Hamilton), la dynamique d'un liquide est irréversible. Les différentes étapes menant de la microscopie à la macroscopie sont connues sous les noms des *équations hiérarchiques de BBGKY*, *équation de Boltzmann*, et *méthode de Chapman-Enskog*. Ces théories seront abordées en quatrième année.

**Approche hydrodynamique :** on décrit le fluide à l'échelle macroscopique en termes de champs tels que la densité  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , et la pression  $p(\mathbf{x}, t)$ . Ici,  $\mathbf{x}$  n'est plus à interpréter comme un point microscopique de mesure nulle, mais comme un volume infinitésimal à l'échelle macroscopique et qui contient un nombre suffisamment grand de particules microscopiques pour que la description en terme de champs soit adéquate. Il s'agit donc d'une théorie des milieux continus. Ici encore, une discussion générale ferait appel à des effets thermiques. Le fait que la température dans un fluide ne soit pas uniforme peut conduire à de nouveaux phénomènes tel l'apparition de structures dissipatives, par exemple dans l'effet Rayleigh-Bénard (apparition de rouleaux convectifs). La description de ces phénomènes peut être très complexe. Dans l'exposé qui suit, nous allons donc négliger ces effets thermiques. Une autre approximation souvent utilisée est celle du *fluide incompressible*, hypothèse adéquate pour beaucoup de liquides. Nous verrons que l'application des lois de Newton à de tels systèmes conduit à l'équation, dite de *Navier-Stokes*. Si le fluide est supposé incompressible et en l'absence de forces volumiques, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (5.27)$$

où  $\nu$  est appelé coefficient de *viscosité cinématique*, et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Cette équation non linéaire aux dérivées partielles décrit un ensemble très varié d'écoulements, qui peuvent être complexes, comme par exemple dans le cas de la *turbulence*.

## 5.5 Théorie de l'élasticité linéaire isotrope

### 5.5.1 Efforts internes et tenseur des tensions

Soit un volume  $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ , soumis à des forces extérieure  $\mathbf{F}_\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ . Considérons un point  $\mathbf{x} \in \Lambda$  et une surface de coupure  $S$  passant par  $\mathbf{x}$ , d'élément de surface infinitésimal  $d\boldsymbol{\sigma}$ , et séparant  $\Lambda$  en deux parties  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ . Enlevons du système par exemple la

partie  $\Lambda_2$ . Pour maintenir  $\Lambda_1$  dans le même état de mouvement qui existait avant la séparation (par exemple l'équilibre), on doit appliquer sur la surface de coupure des forces appelées *forces internes*. Pour ceci il faudra appliquer la force  $d\mathbf{F}_S$  sur l'élément de surface  $d\boldsymbol{\sigma} = (d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3)$  (cf. Fig. 5.4).

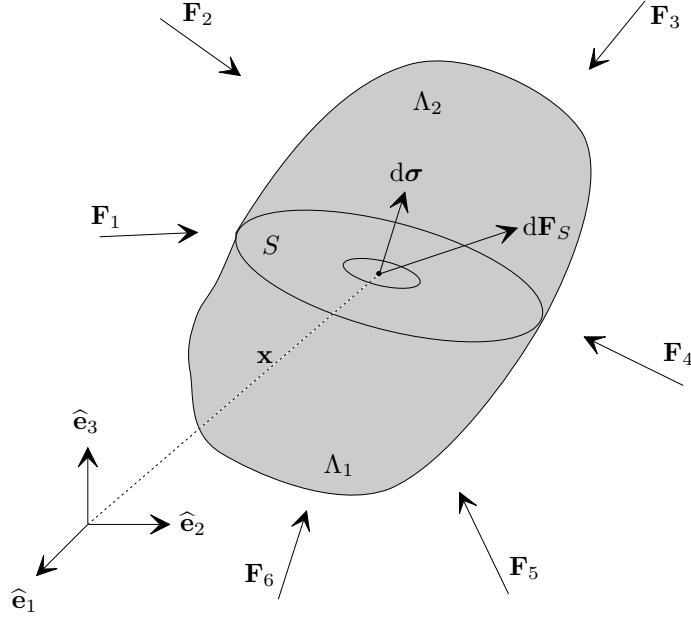


FIG. 5.4 – Forces internes.

Considérons à présent l'élément de surface orienté selon  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , alors la force interne s'appliquant sur cette surface s'écrit  $d\mathbf{F}_S^3 = (dF_{S_1}^{(3)}, dF_{S_2}^{(3)}, dF_{S_3}^{(3)})$ . De même, dans le cas général  $d\mathbf{F}_S^i = (dF_{S_1}^{(i)}, dF_{S_2}^{(i)}, dF_{S_3}^{(i)})$  est la force interne sur l'élément de surface orienté selon  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , où donc  $F_{S_j}^{(i)}$  est la composante  $j$  de la force de surface exercée sur un élément de surface orienté selon  $\hat{\mathbf{e}}_i$ .

**Définition 5.1** On définit le *tenseur des contraintes* (ou des *tensions*)  $\tau_j^i(\mathbf{x})$  par

$$\tau_j^i(\mathbf{x}) = \frac{dF_{S_j}^{(i)}(\mathbf{x})}{d\sigma_i(\mathbf{x})}. \quad (5.28)$$

La Fig. 5.5 illustre la décomposition de  $d\mathbf{F}_S^3$ .

On voit donc de cette figure que  $dF_{S_j}^3 = \tau_j^3 d\sigma_3$ , ce qui est le cas particulier  $i = 3$  de l'Eq. (5.28). Remarquons que la métrique étant euclidienne, la position des indices des tenseurs n'a pas d'importance donc  $\tau_j^i = \tau_i^j = \tau_{ij} = \tau^{ij}$ . De plus,  $\boldsymbol{\tau}$  n'est pas exactement un tenseur mais une densité tensorielle (ou tenseur de type densité, cf. annexe A.8). Lorsque  $i = j$  les contraintes sont normales, tandis que si  $i \neq j$  elles sont tangentiellles. La contrainte a donc les unités d'une force par unité de surface. Si à présent on note  $dF_{S_j}$  la force infinitésimale totale dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_j$ , alors de l'Eq. (5.28) :

$$dF_{S_j} = \sum_{i=1}^3 dF_{S_j}^{(i)} = \tau_j^i d\sigma_i, \quad (5.29)$$

où on adopte la convention de Einstein selon laquelle il y a sommation sur les indices répétés. En effet, la force totale dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_j$  s'obtient en sommant sur toutes les

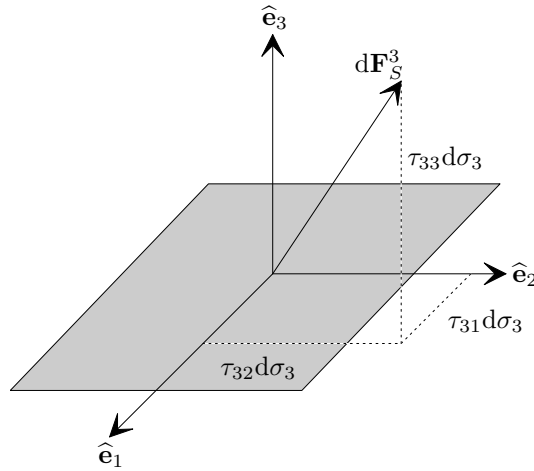


FIG. 5.5 – Décomposition par les contraintes de la force de surface.

surfaces orientées selon  $\hat{e}_i$  les composantes de la force dans la direction  $\hat{e}_j$ . La force totale dans la direction  $\hat{e}_j$  est donc :

$$dF_{Sj} = \sum_{i=1}^3 dF_{Sj}^i \stackrel{(5.28)}{=} \sum_{i=1}^3 \tau_j^i d\sigma_i, \quad (5.30)$$

ce qui redonne bien l'Eq. (5.29).

## 5.5.2 Conditions d'équilibre

On considère un élément de volume dans le corps étudié, et exprime les conditions d'équilibre selon lesquelles la somme des forces ainsi que la somme des moments sont nulles.

### 5.5.2.1 Forces

Exprimons dans un premier temps la condition d'équilibre local des forces. Pour ceci, introduisons la densité volumique de forces de volume  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Soit  $\mathbf{F}_V(\mathbf{x})$  la résultante des forces volumiques au point  $\mathbf{x}$ , alors

$$d\mathbf{F}_V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (5.31)$$

De même pour les forces de surface, si  $dF_{Si}(\mathbf{x})$  est la résultante des forces de surface dans la direction  $i$ , nous avons vu de l'Eq. (5.29) que

$$dF_{Si} = \tau_i^j d\sigma_j. \quad (5.32)$$

La condition d'équilibre s'énonce comme l'égalité (au signe près) entre la résultante des forces de surface  $\mathbf{F}_S$  et des forces de volume  $\mathbf{F}_V$  qui s'exercent sur le volume de surface fermée  $S$  (cf. Fig. 5.6).

Ainsi, l'écriture explicite de la nullité de la somme des forces sur un volume de contrôle  $V$  de surface  $S$  est :

$$\int_V d\mathbf{F}_V + \int_S d\mathbf{F}_S = 0, \quad (5.33)$$

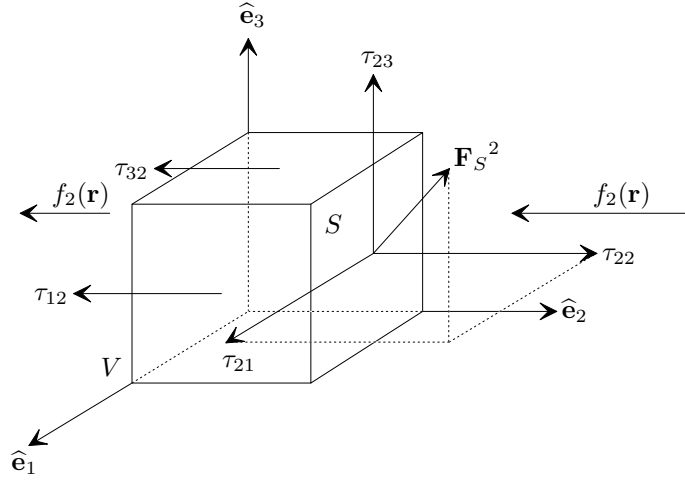


FIG. 5.6 – Condition d'équilibre des forces.

ce qui pour la composante  $i$  à l'aide de l'Eq. (5.32) et du théorème de la divergence (parfois aussi appelé théorème d'Ostrogradski) devient

$$\underbrace{\int_V dF_{Vi}(\mathbf{x})}_{\stackrel{(5.31)}{=} \int_V d\mathbf{x} f_i(\mathbf{x})} = - \int_S d\sigma_j \tau_i^j(\mathbf{x}) = - \int_V d\mathbf{x} \partial_j \tau_i^j(\mathbf{x}). \quad (5.34)$$

Ceci étant vrai pour tout volume  $V$ , on aboutit à la forme locale de la condition d'équilibre :

$$f_i(\mathbf{x}) = -\partial_j \tau_i^j(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, 3. \quad (5.35)$$

Il est possible de généraliser cette condition d'équilibre à la dynamique (comme nous le verrons à nouveau dans la Sect. 5.8.1) en utilisant le principe de d'Alembert. Dans ce cas, on considère le système dynamique à l'équilibre s'il est soumis à la force  $-\dot{p}_i(\mathbf{x})$ , où  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  est la densité d'impulsion. Ainsi l'Eq. (5.35) reste valable en remplaçant  $f_i(\mathbf{x})$  par  $f_i(\mathbf{x}) - \dot{p}_i(\mathbf{x})$ .

### 5.5.2.2 Moments

L'autre condition d'équilibre concerne les moments des forces et a pour conséquence le résultat suivant.

**Lemme 5.1** *Le tenseur des tensions est symétrique* :<sup>1</sup>  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ .

**Preuve:** La preuve se réalise en développant la condition d'équilibre des moments sur le volume  $V$  de surface  $S$ . Soient  $\mathbf{M}_V$  les moments issus des forces de volume, et  $\mathbf{M}_S$  ceux s'exerçant sur la surface, alors

$$\int_V d\mathbf{M}_V + \int_S d\mathbf{M}_S = 0. \quad (5.36)$$

<sup>1</sup>Ce lemme peut être mis en défaut si le système est soumis à des forces qui ne sont pas invariantes sous le renversement du temps.

De l'Eq. (5.31) on a

$$d\mathbf{M}_V = \mathbf{x} \times d\mathbf{F}_V \stackrel{(5.31)}{=} \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (5.37)$$

De l'Eq. (5.32) on a

$$d\mathbf{M}_S = \mathbf{x} \times d\mathbf{F}_S \stackrel{(5.32)}{=} \mathbf{x} \times \sum_{i,j=1}^3 \widehat{\mathbf{e}}_i \tau_i^j d\sigma_j. \quad (5.38)$$

On définit le *symbole d'antisymétrie* (parfois aussi appelé *symbole de Levi-Civita*)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont identiques,} \\ 1 & \text{si } (i, j, k) = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}, \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = \{(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\}. \end{cases} \quad (5.39)$$

On peut alors vérifier que si  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , alors le produit vectoriel de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  s'écrit

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i a_j b_k. \quad (5.40)$$

Ainsi les Eqs. (5.37) et (5.38) s'écrivent

$$d\mathbf{M}_V = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i x_j f_k d\mathbf{x}, \quad (5.41)$$

$$d\mathbf{M}_S = \sum_{i,j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i x_j \tau_k^l d\sigma_l. \quad (5.42)$$

La condition d'équilibre des moments (5.36) devient

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_V d\mathbf{x} x_j f_k + \sum_{i,j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_S d\sigma_l x_j \tau_k^l = 0. \quad (5.43)$$

Le théorème de la divergence fournit

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_S d\sigma_l x_j \tau_k^l &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_V d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \tau_k^l) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_V d\mathbf{x} (x_j \partial_l \tau_k^l + \tau_k^l \delta_{jl}). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Or la condition d'équilibre (5.35) s'écrit  $\partial_l \tau_k^l = -f_k$ , qui dans l'Eq. (5.44) donne

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_S d\sigma_l x_j \tau_k^l = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_V d\mathbf{x} (-x_j f_k + \tau_k^j). \quad (5.45)$$

Insérant l'Eq. (5.45) dans (5.43) il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_V d\mathbf{x} (x_j f_k - x_j f_k + \tau_k^j) = 0 \\ \Rightarrow &\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{e}}_i \int_V d\mathbf{x} \tau_k^j = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Cette relation étant valable pour tout volume  $V$ , la forme locale est

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \tau_k^j = 0. \quad (5.47)$$

Utilisant la définition (5.39) de  $\varepsilon_{ijk}$ , les seules relations non nulles fournies par l'Eq. (5.47) sont

$$\varepsilon_{312} \hat{\mathbf{e}}_3 \tau_2^1 + \varepsilon_{321} \hat{\mathbf{e}}_3 \tau_1^2 = 0, \quad (5.48)$$

$$\varepsilon_{213} \hat{\mathbf{e}}_2 \tau_3^1 + \varepsilon_{231} \hat{\mathbf{e}}_2 \tau_1^3 = 0, \quad (5.49)$$

$$\varepsilon_{123} \hat{\mathbf{e}}_1 \tau_3^2 + \varepsilon_{132} \hat{\mathbf{e}}_1 \tau_2^3 = 0, \quad (5.50)$$

ce qui par (5.39) implique

$$\tau_2^1 = \tau_1^2, \quad (5.51)$$

$$\tau_3^1 = \tau_1^3, \quad (5.52)$$

$$\tau_3^2 = \tau_2^3. \quad (5.53)$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique, ce qui achève la preuve. ■

### 5.5.3 Le tenseur des déformations

Un solide indéformable est caractérisé par des distances constantes entre toute paire de points. Lorsqu'il y a déformation, ceci n'est plus le cas et le mouvement le plus général se décompose en une translation, une rotation, et une déformation. Nous allons le montrer explicitement.

Considérons deux points  $A = (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$  et  $B = (x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) = \mathbf{x} + \mathbf{h}$ , où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ , et donc  $\mathbf{AB} = \mathbf{h}$ . La déformation du système est décrite par le champ de déplacement  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  qui amène  $A$  en  $A' = \mathbf{x}'$  et  $B$  en  $B'$  (cf. Fig. 5.7).

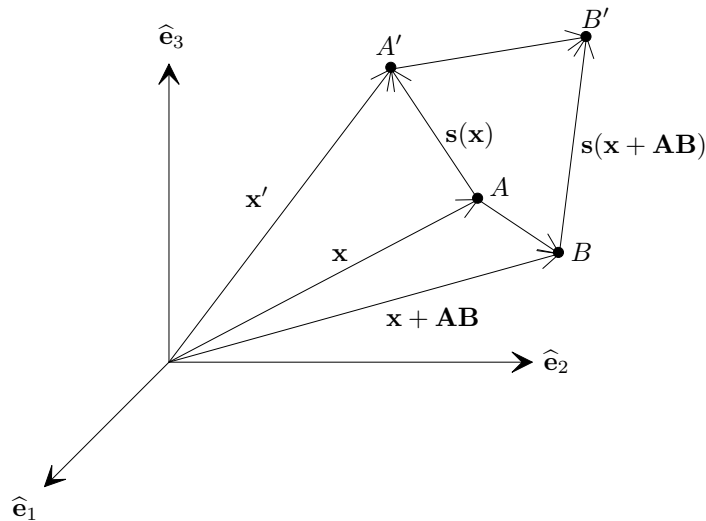


FIG. 5.7 – Décomposition du mouvement.

On peut développer le déplacement de  $B$  en série de Taylor autour du déplacement de  $A$  :

$$\underbrace{\mathbf{s}(\mathbf{x} + \mathbf{h})}_{= \mathbf{s}(B)} = \underbrace{\mathbf{s}(\mathbf{x})}_{= \mathbf{s}(A)} + [(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{x}) \cdot \nabla] \mathbf{s} + \mathcal{O}(h^2) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_i} h_i + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.54)$$

D'autre part, on a pour la composante  $j$  du déplacement

$$\frac{\partial s_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_j}{\partial x_i} - \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_j}{\partial x_i} + \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right). \quad (5.55)$$

Insérant l'Eq. (5.55) dans (5.54) que l'on réécrit pour la composante  $s_j$  il vient

$$s_j(B) = s_j(A) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial s_j}{\partial x_i} - \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right) h_i}_{= [(\nabla \times \mathbf{s}) \times \mathbf{AB}]_j} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_j}{\partial x_i} + \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right) h_i}_{\doteq s_{Dj}} + \mathcal{O}(h^2), \quad (5.56)$$

que l'on écrit vectoriellement

$$\mathbf{s}(B) = \mathbf{s}(A) + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{s}) \times \mathbf{AB} + \mathbf{s}_D. \quad (5.57)$$

Le premier terme  $\mathbf{s}(A)$  est associé à une translation globale du solide, le second  $(\nabla \times \mathbf{s}) \times \mathbf{AB}$  à une rotation (ceci sera plus clair lors de l'établissement du tenseur des vitesses de déformation, cf. Sect. 5.7.1), et le dernier  $\mathbf{s}_D$  à une déformation. Ainsi

$$\mathbf{s}_D = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) h_i \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (5.58)$$

**Définition 5.2** On définit le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}$  par

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right)}. \quad (5.59)$$

$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$  est un champ tensoriel. Il est clair que le tenseur des déformations est symétrique  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ . Utilisant la définition 5.2, on voit que la déformation (5.58) prend la forme linéaire

$$s_{Di} = \varepsilon_{ij} h_j. \quad (5.60)$$

Quelle est l'interprétation du tenseur des déformations? Les termes  $\varepsilon_{ii} = \partial s_i / \partial x_i$  représentent une variation de longueur relative, ou *allongement spécifique*. En effet, de l'Eq. (5.54) on tire

$$s_i(x_i + h_i) = s_i(x_i) + h_i \frac{\partial s_i}{\partial x_i} + \mathcal{O}(h_i^2), \quad (5.61)$$

d'où en négligeant les termes non linéaires en  $h_i$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial s_i}{\partial x_i} \stackrel{(5.61)}{=} \frac{s_i(x_i + h_i) - s_i(x_i)}{h_i}. \quad (5.62)$$

Or les longueurs avant et après déformation étant  $|\mathbf{AB}| = h$  et  $|\mathbf{A'B}'| = h'$  respectivement, on tire (cf. Fig. 5.8) :

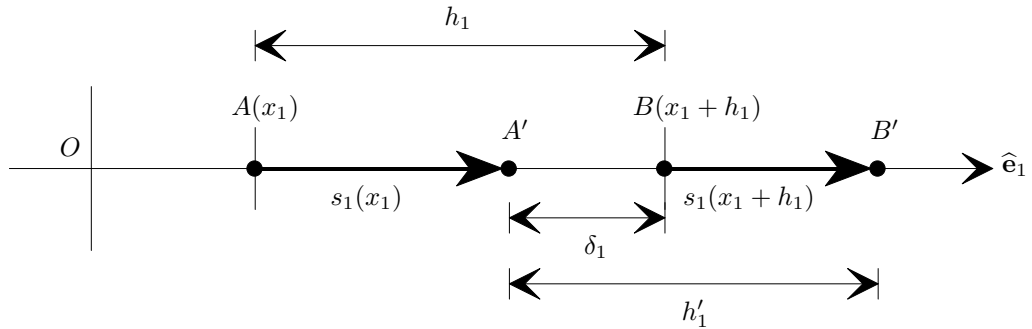


FIG. 5.8 – Allongement spécifique unidimensionnel.

$$s_i(x_i) = h_i - \delta_i, \tag{5.63a}$$

$$s_i(x_i + h_i) = h'_i - \delta_i. \tag{5.63b}$$

Insérant les Eqs. (5.63) dans (5.62) il vient

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial s_i}{\partial x_i} = \frac{h'_i - \delta_i - (h_i - \delta_i)}{h_i} = \frac{h'_i - h_i}{h_i}. \tag{5.64}$$

Si  $i \neq j$ , alors  $\varepsilon_{ij}$  décrit un *cisaillement*. En effet, choisissons un rectangle situé dans le plan  $\{\hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , centré en  $A = A'$ , et subissant une déformation telle que  $\varepsilon_{ii} = 0$ . Prenons le point  $B$  dans le coin supérieur droit de l'objet (cf. Fig. 5.9).

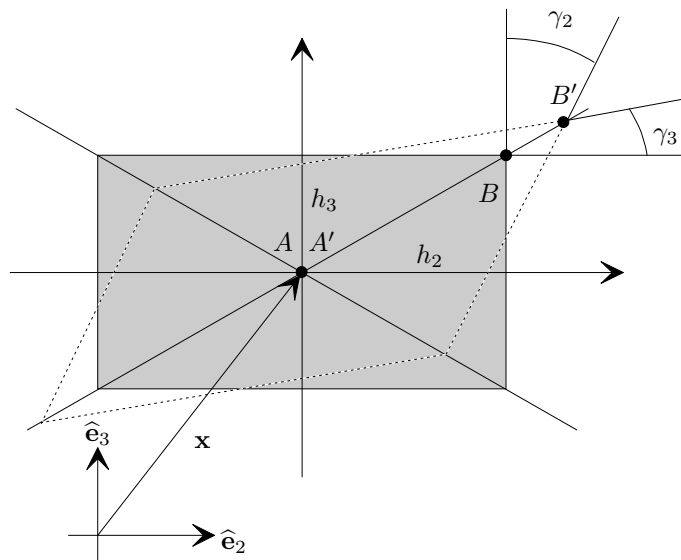


FIG. 5.9 – Déformation de cisaillement dans les deux directions  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ .



On a alors  $\mathbf{AB} = h_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + h_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ . Comme  $h_1 = 0$ , l'Eq. (5.54) fournit

$$\mathbf{s}(\mathbf{x} + \mathbf{AB}) = \underbrace{\mathbf{s}(A)}_{=0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_i} h_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x_3} h_3 \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} h_3 \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Or comme par hypothèse  $\varepsilon_{ii} = \partial s_i / \partial x_i = 0$ , l'Eq. (5.65) devient

$$\mathbf{s}(\mathbf{x} + \mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_3} h_3 \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_2} h_2 \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Par construction géométrique on a

$$\text{tg } \gamma_2 = \frac{s_2}{h_3 + s_3}, \quad (5.67a)$$

$$\text{tg } \gamma_3 = \frac{s_3}{h_2 + s_2}, \quad (5.67b)$$

ce qui fournit

$$s_2 = h_3 \text{tg } \gamma_2 + \frac{h_2 \text{tg } \gamma_2}{1 - \text{tg } \gamma_2} (h_2 \text{tg } \gamma_3 + h_3 \text{tg } \gamma_2 \text{tg } \gamma_3), \quad (5.68a)$$

$$s_3 = h_2 \text{tg } \gamma_3 + h_3 \text{tg } \gamma_2 \text{tg } \gamma_3. \quad (5.68b)$$

Pour de faibles déformations  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  ainsi que  $|\mathbf{h}|$  petit

$$\frac{s_2}{h_3} \simeq \text{tg } \gamma_2, \quad (5.69a)$$

$$\frac{s_3}{h_2} \simeq \text{tg } \gamma_3, \quad (5.69b)$$

d'où

$$\frac{\partial s_2}{\partial x_3} h_3 \simeq h_3 \text{tg } \gamma_2 \simeq h_3 \gamma_2, \quad (5.70a)$$

$$\frac{\partial s_3}{\partial x_2} h_2 \simeq h_2 \text{tg } \gamma_3 \simeq h_2 \gamma_3. \quad (5.70b)$$

Ainsi

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) \stackrel{(5.70)}{\simeq} \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{2} \doteq \frac{\gamma}{2}, \quad (5.71)$$

où  $\gamma = \gamma_2 + \gamma_3$  est dit *angle de cisaillement*.

#### 5.5.4 Propriétés du tenseur des déformations

Le tenseur des déformations étant symétrique réel, il peut être orthogonalement diagonalisé (c'est-à-dire qu'il existe une base de vecteurs propres orthogonaux). Ceci ne signifie pas que ces tenseurs ne dépendent plus que de trois composantes indépendantes car il aura déjà fallu utiliser trois paramètres dépendant des éléments du tenseur primitif pour diagonaliser ce dernier. Pour les déformations uniformes (i.e., le champ tensoriel est constant dans l'espace), une seule base peut diagonaliser ces tenseurs partout dans le corps. Par contre, ceci n'est plus le cas pour une déformation générale pour laquelle la base de vecteurs propres est locale.

**Lemme 5.2** *Soit un volume de mesure  $V$  et  $\Delta V$  sa variation due à une déformation, alors au premier ordre dans le tenseur des déformations la variation relative de volume est donnée par la trace du tenseur des déformations :*

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.72)$$

**Preuve:** le volume avant déformation est

$$V = \prod_{i=1}^3 h_i. \quad (5.73)$$

Après déformation, il vaut

$$V' = \prod_{i=1}^3 h'_i, \quad (5.74)$$

où  $h'_i$  sont les nouvelles dimensions linéaires données par l'Eq. (5.64)

$$h'_i = h_i(1 + \varepsilon_{ii}). \quad (5.75)$$

Insérant l'Eq. (5.75) dans (5.74) il vient

$$V' = \prod_{i=1}^3 h_i(1 + \varepsilon_{ii}) = \left[ 1 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^3 \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \prod_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^2)} \right] \prod_{i=1}^3 h_i. \quad (5.76)$$

La variation de volume  $\Delta V$  étant donnée par  $\Delta V = V' - V$ , les Eqs. (5.73) et (5.76) fournissent

$$\frac{\Delta V}{V} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.77)$$

ce qui est le résultat cherché et par conséquent achève la preuve. ■

Etant donné que la théorie développée est linéaire, le lemme 5.2 peut aussi s'énoncer : *le volume d'un solide n'est pas modifié par une déformation si et seulement si  $\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ .*

Si le volume du solide ne change pas, seule sa forme est modifiée et on parle de *cisaillement*. Dans le cas contraire si seul le volume change on parle de *compression uniforme*. Toute déformation peut être représentée par la somme d'un cisaillement et d'une compression uniforme :

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}}_{\doteq \varepsilon_{ij}^0} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.78)$$

En effet,  $\varepsilon_{ij}^0$  ainsi défini est de trace nulle, tandis que  $(1/3)\delta_{ij} \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}$  est purement diagonal.

### 5.5.5 Relation linéaire entre contraintes et déformations

Il est d'usage lors de l'étude de systèmes avec ressorts de choisir des forces de rappel harmoniques, c'est-à-dire dont le potentiel est quadratique. Ceci mène à une force proportionnelle à la déformation. Il s'agit bien entendu d'une relation phénoménologique

uniquement valable dans le régime linéaire des petites déformations. Comme évoqué dans la Sect. 5.4, l'étude des courbes de traction des différents matériaux nous renseigne sur le domaine de validité de la loi linéaire. Si la force dépasse une certaine limite, alors apparaissent des non linéarités et dans un second temps la déformation devient plastique, soit irréversible et avec hystérèse. Si on continue d'augmenter la contrainte jusqu'à une valeur critique, alors il y a rupture du matériau (cf. Fig. 5.10).

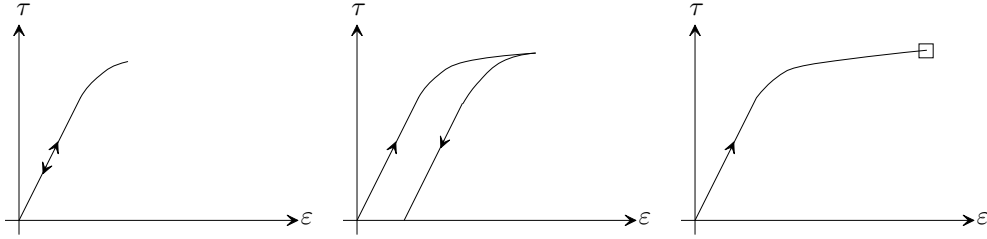


FIG. 5.10 – Courbes de traction et différents comportements.

L'image de gauche représente le comportement élastique linéaire réversible où le déplacement est proportionnel à la force. L'image du milieu montre l'émergence de non linéarités puis d'irréversibilité, tandis que celle de droite illustre la rupture du matériau.

L'expérience montre qu'une déformation dans une direction donnée n'est pas forcément le résultat d'une contrainte dans cette même direction. On parle alors d'*anisotropie*. C'est donc de façon naturelle que la forme linéaire la plus générale entre les contraintes  $\tau$  et les déformations  $\varepsilon$  est de la forme

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ij}{}^{kl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}). \quad (5.79)$$

Dans le cas isotrope on remarque que  $C_{ij}{}^{kl} \sim \delta_i^k \delta_j^l$ . On peut néanmoins donner une justification de l'Eq. (5.79). Soit  $u(\mathbf{x}, \varepsilon)$  la densité volumique d'énergie interne, fonction de la position et du tenseur des déformations. Supposant les déformations petites, on réalise un développement de la forme

$$u(\mathbf{x}, \varepsilon) = u_0(\mathbf{x}) + b^{ij}(\mathbf{x})\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) + c^{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.80)$$

Pour des raisons de dimensions la contraction  $\tau_{ij}\varepsilon_{ij}$  correspond à un travail mécanique et donc à un terme d'énergie, ainsi

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) \simeq \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \stackrel{(5.80)}{=} b_{ij}(\mathbf{x}) + c_{ij}{}^{kl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.81)$$

S'il n'y a pas de déformation, alors  $\varepsilon_{ij} = \tau_{ij} = 0$ , et l'Eq. (5.81) fournit  $b_{ij}(\mathbf{x}) = 0 \forall i, j, \mathbf{x}$ . En passant la constante de proportionnalité entre  $\tau_{ij}$  et  $\partial u / \partial \varepsilon_{ij}$  dans les coefficients  $c_{ij}{}^{kl}$ , qui ainsi seront notés  $C_{ij}{}^{kl}$ , on obtient de l'Eq. (5.81) la relation (5.79). Au premier ordre, on suppose aussi que  $\mathbf{C}$  ne dépend pas de la position  $\mathbf{x}$ . Ceci revient à dire que les propriétés élastiques restent en bonne approximation les mêmes en tout point du corps. Cette hypothèse serait mise en défaut si par exemple il existait un fort gradient de température. On dit de  $\mathbf{C}$  qu'il s'agit du *tenseur des modules élastiques*. A nouveau, la théorie étant formulée sur un espace euclidien, la métrique est l'identité et donc la position verticale des indices n'a pas d'incidence.

La théorie développée ici prenant place dans un espace de dimension trois, le tenseur  $\mathbf{C}$  de rang 4 possède  $3^4 = 81$  composantes. Or comme  $\varepsilon_{ij}$  et  $\tau_{ij}$  sont symétriques, on en déduit de l'Eq. (5.79) que

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{jilk}. \quad (5.82)$$

De plus, on peut montrer en adoptant un réarrangement d'indices que [26]

$$C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (5.83)$$

Comme  $C_{ijkl} \neq C_{ikjl}$  le tenseur  $\mathbf{C}$  n'est toutefois pas totalement symétrique. Utilisant les Eqs. (5.82) et (5.83) on peut voir que le nombre total de coefficients indépendants dans le cas général est 21. Selon les propriétés de symétrie du cristal, ce nombre est encore réduit. L'étude et l'exploitation de ces symétries est l'objet de la *crystallographie*. Ainsi, selon l'*Union internationale de crystallographie* il existe six *familles cristallines* (triclinique, monoclinique, orthorhombique, tétragonal, hexagonal, cubique), quatorze *réseaux de Bravais* (cf. Fig. 5.11) répartis entre sept *systèmes de Bravais*, trente-deux *classes cristallines* réparties entre sept *systèmes cristallins*.

Pour plus de détails sur les systèmes cristallins et la théorie linéaire anisotrope on renvoie à [26]. La situation la plus simple est celle du réseau cubique correspondant à un corps isotrope. Dans ce cas, on peut montrer à l'aide des symétries des Eqs. (5.82) et (5.83) qu'il n'existe que deux coefficients indépendants.

Une autre démarche pour aboutir à l'existence de deux coefficients indépendants est la suivante.

Décomposons le tenseur des déformations en une composante de cisaillement et une de compression uniforme, comme réalisé pour l'Eq. (5.78). Faisons de même pour le tenseur des tensions :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{3}\delta_{ij} \operatorname{Tr} \varepsilon, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \operatorname{Tr} \varepsilon, \quad (5.84)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^0 + \frac{1}{3}\delta_{ij} \operatorname{Tr} \tau, \quad \tau_{ij}^0 = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \operatorname{Tr} \tau. \quad (5.85)$$

Par isotropie, le cisaillement ne doit pas dépendre de la direction, donc

$$\tau_{ij}^0 = a\varepsilon_{ij}^0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \forall i, j. \quad (5.86)$$

Il en est de même pour la compression uniforme :

$$\operatorname{Tr} \tau = b \operatorname{Tr} \varepsilon, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (5.87)$$

En remplaçant les Eqs. (5.86) et (5.87) dans (5.85) il vient

$$\tau_{ij} = \underbrace{a}_{\doteq 2\mu} \varepsilon_{ij} + \underbrace{\frac{b-a}{3}}_{\doteq \lambda} \delta_{ij} \operatorname{Tr} \varepsilon. \quad (5.88)$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont appelés *coefficients de Lamé*, et sont déterminés expérimentalement pour chaque matériau.  $\mu$  est appelé le *module de cisaillement*.

**Lemme 5.3** *Soit une compression uniforme de pression  $p$ , alors*

$$\left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{Tr} \varepsilon = -p. \quad (5.89)$$

**Preuve:** dans le cas de la compression uniforme, le tenseur des contraintes est

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (5.90)$$

où  $p = |\mathbf{F}|/S$  est la pression uniforme s'exerçant sur chaque surface d'aire  $S$  avec  $\mathbf{F}$  la force. En effet, dans ce cas  $dF_{S,i} = -p d\sigma_i = -p\delta_i^j d\sigma_j$ , et l'Eq. (5.29) donne  $-p\delta_i^j d\sigma_j = \tau_i^j d\sigma_j$ .

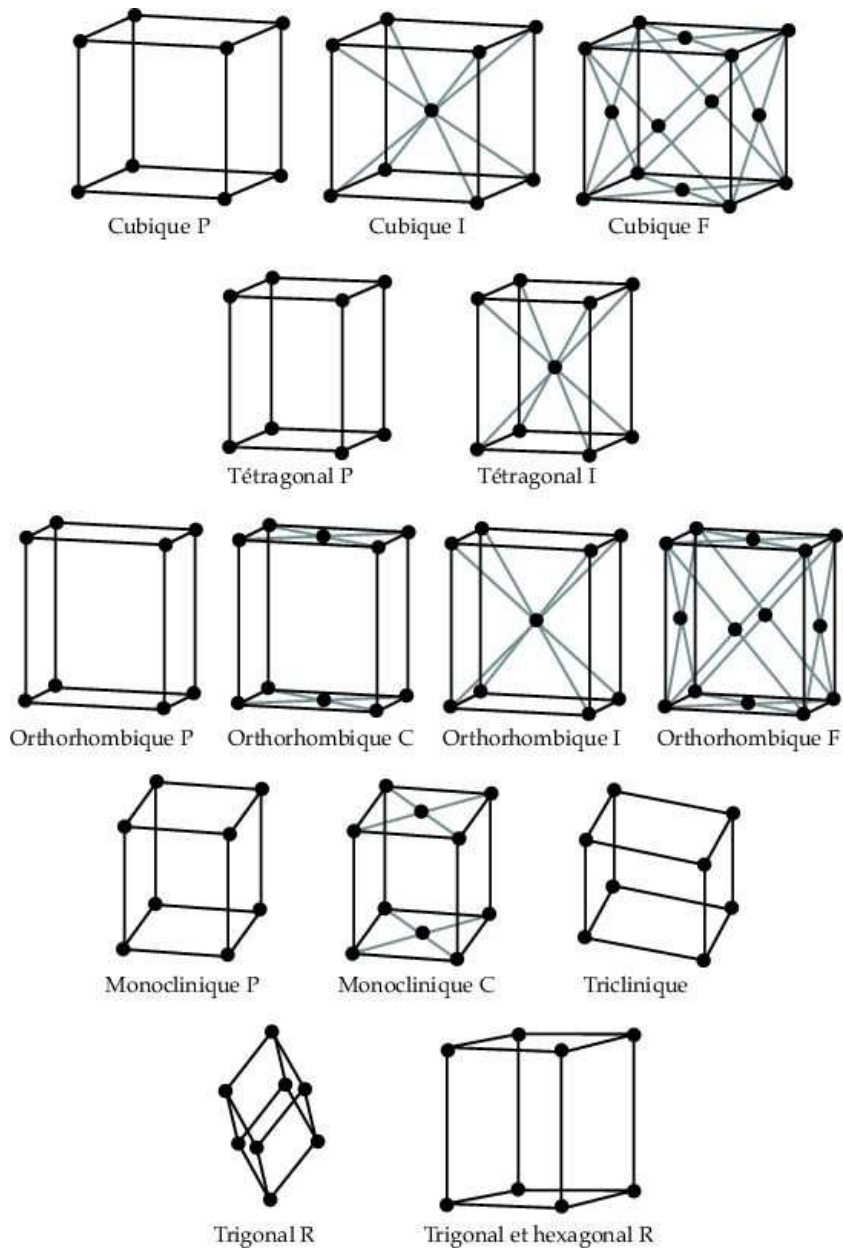


FIG. 5.11 – Les quatorze réseaux de Bravais.

L'intégration de cette relation sur une surface puis la considération de sa forme locale  $-p\delta_{ij} = \tau_{ij}$  fournit le résultat (5.90). D'autre part, pour une compression uniforme les composantes hors-diagonales du tenseur des contraintes étant nulles, l'Eq. (5.88) fournit

$$\tau_{ij} = 2\mu\delta_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\text{Tr}\varepsilon. \quad (5.91)$$

La compression étant uniforme, la déformation relative dans chaque direction est la même d'où  $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{jj} \forall i, j$ , et

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3}\text{Tr}\varepsilon. \quad (5.92)$$

Insérant l'Eq. (5.92) dans (5.91), que l'on égale ensuite à (5.90), il vient :

$$-p\delta_{ij} = \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)\delta_{ij}\text{Tr}\varepsilon. \quad (5.93)$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout  $i, j$  on peut s'affranchir du symbole de Kronecker, ce qui génère l'Eq. (5.89) et par conséquent achève la preuve. ■

### 5.5.6 L'exemple de l'élongation d'un barreau

Considérons une barre parallélépipédique de dimensions  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , aux deux extrémités de laquelle on exerce une traction  $\mathbf{F}$ . Sous l'action de la traction, le barreau s'allonge tout en gardant une forme parallélépipédique (cf. Fig. 5.12).

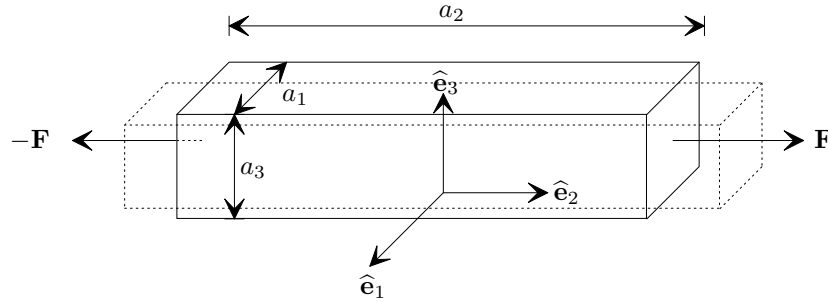


FIG. 5.12 – Traction sur un barreau.

Comme il y a traction simple sans cisaillement, alors les termes non diagonaux sont nuls :  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ii}\delta_{ij}$ . De plus, il y a symétrie et isotropie du problème dans le plan engendré par  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_3\}$  donc  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} \doteq \varepsilon_1$ . Notons  $\varepsilon_{22} \doteq \varepsilon_2$ , alors la relation (5.88) fournit

$$\tau_{11} = \tau_{33} = 2\mu\varepsilon_1 + \lambda(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (5.94a)$$

$$\tau_{22} = 2\mu\varepsilon_2 + \lambda(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (5.94b)$$

On vérifie qu'en l'absence de forces volumiques, la condition d'équilibre (5.35) est visiblement satisfaite :

$$-\partial_j\tau^j_i(\mathbf{x}) = f_i = 0. \quad (5.95)$$

Les conditions aux extrémités de la barre s'écrivent avec les Eqs. (5.94)

$$2\mu\varepsilon_1 + \lambda(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0, \quad (5.96a)$$

$$2\mu\varepsilon_2 + \lambda(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{F}{a_1a_3}. \quad (5.96b)$$

La solution du système (5.96) est donnée par

$$\varepsilon_1 = - \underbrace{\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}}_{\doteq \nu} \varepsilon_2, \quad (5.97a)$$

$$\varepsilon_2 = \underbrace{\frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)}}_{\doteq E^{-1}} \tau_2, \quad \tau_2 = \frac{F}{a_1 a_3}. \quad (5.97b)$$

Les coefficients  $E$  et  $\nu$  ainsi définis sont respectivement le *module de Young* et le *module de Poisson*. Des ordres de grandeur pour ces coefficients sont  $E \sim 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , et  $\nu \in [0.3, 0.5]$ . L'Eq. (5.97b) donne la *loi de Hooke* de la traction simple, soit  $\tau = E\varepsilon$ , c'est-à-dire que l'élongation est proportionnelle à la contrainte, où le coefficient de proportionnalité est donné par le module de Young.

Connaissant  $\varepsilon$  et utilisant la définition du tenseur des contraintes  $\varepsilon_{ij} = (\partial_i s_j + \partial_j s_i)/2$ , par intégration on trouve les déplacements :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \frac{\tau_2}{E} \begin{pmatrix} -\nu x_1 \\ x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix}, \quad (5.98)$$

avec  $\tau_2 = F/(a_1 a_3)$ .

## 5.6 Généralités sur les corps visqueux

Jusqu'à présent nous avons étudié la *statique*. Cette section aborde donc l'aspect dynamique des milieux continus et déformables. Le comportement visqueux de la matière est plus facilement mis en évidence dans les fluides. Par exemple, considérons l'expérience dans laquelle deux plaques planes de surface  $S$  distantes de  $h$  sont placées à l'intérieur d'un récipient contenant un fluide. On observe que si  $h$  est suffisamment petit, pour maintenir en mouvement la plaque supérieure à vitesse tangentielle  $\mathbf{v}$  relative à la plaque inférieure, il faut appliquer sur la plaque supérieure une force  $\mathbf{F}$  colinéaire à  $\mathbf{v}$ , et  $-\mathbf{F}$  sur la plaque inférieure pour la maintenir immobile (cf. Fig. 5.13).

Le comportement visqueux est alors caractérisé par le fait que le fluide entre les deux plaques est entraîné dans le sens du déplacement. La relation entre la force appliquée  $\mathbf{F}$  et la vitesse de déplacement  $\mathbf{v}$  dépend de la géométrie, du fluide, de la température, etc., et donc peut être compliquée. Le cas le plus simple est celui du *fluide newtonien* pour lequel cette relation est linéaire. Dans ce cas et pour un *écoulement laminaire* obtenu pour des vitesses assez petites, le profil de vitesse du fluide varie linéairement entre les deux plaques. La vitesse du fluide en  $x_3 = h$  vaut  $\mathbf{v}$ , tandis qu'elle s'annule en  $x_3 = 0$ . Cela permet de définir (et de mesurer) le *coefficient de viscosité dynamique*  $\eta$  par la relation

$$F = \eta \frac{S}{h} v. \quad (5.99)$$

Par définition, on dira que le fluide est *parfait* si sa viscosité est nulle. Nous reviendrons sur cette notion dans le chapitre dévolu à la mécanique des fluides.

Les phénomènes liés à la viscosité sont irréversibles du point de vue thermodynamique, donc dissipatifs. En effet, il y a alors frottement interne, donc dissipation d'énergie mécanique qui se transforme en chaleur. Par conséquent apparaissent des phénomènes dissipatifs de thermoconduction, ainsi que pour les solides des déplacements d'atomes par l'intermédiaire des défauts de structure cristalline (dislocations).

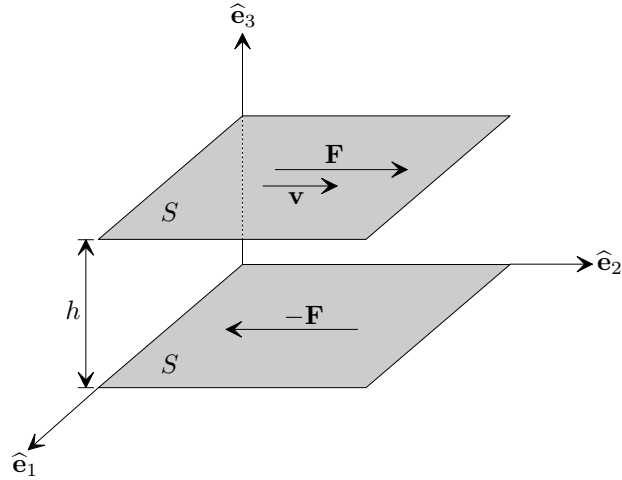


FIG. 5.13 – Ecoulement visqueux entre deux plaques.

## 5.7 Théorie de la viscosité linéaire isotrope

### 5.7.1 Le tenseur des vitesses de déformation

Un calcul similaire à celui de la Sect. 5.5.3 mais cette fois pour les vitesses de déplacement  $\mathbf{u}$  donne

$$\mathbf{u}(B) = \mathbf{u}(A) + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{AB} + \mathbf{u}_D, \quad (5.100)$$

avec

$$\mathbf{u}_D = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) h_i \hat{\mathbf{e}}_j \quad (5.101)$$

la vitesse de déformation. Or comme  $\mathbf{u}$  est la vitesse de déplacement et  $\mathbf{s}$  le déplacement, on a  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = d\mathbf{s}/dt$ , ce qui mène à la définition suivante.

**Définition 5.3** Soit  $\varepsilon_{ij}$  le tenseur des déformations, alors on définit le **tenseur des vitesses de déformation** par

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.102)$$

Utilisant la définition 5.3, l'Eq. (5.101) s'écrit ainsi

$$u_{Di} = \dot{\varepsilon}_{ij} h_j. \quad (5.103)$$

**Remarque:** toute vitesse de rotation d'un point  $B$  autour de  $A$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{u}(B) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}, \quad (5.104)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est le *vecteur de vortacité* (ou aussi *vecteur tourbillon*, cf. Sect. 6.4.1) dont l'expression est donnée par le rotationnel de la vitesse :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}. \quad (5.105)$$



Ceci confirme notre interprétation du second terme du membre de droite des Eqs. (5.57) et (5.100) comme étant la contribution due à la rotation. Par exemple, en coordonnées cylindriques pour un mouvement dans le plan  $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\varphi\}$  à rayon constant, on a  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_z$  et  $\mathbf{AB} = r\hat{\mathbf{e}}_r$ . Ainsi on retrouve le résultat connu :  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB} = r\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = u_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ . On vérifie ainsi la relation (5.105), avec  $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z) = (0, u_\varphi, 0)$ ,  $u_\varphi = u_\varphi(r)$  (cf. annexe A.13) :

$$\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \stackrel{u_\varphi = r\dot{\varphi}}{=} \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_z = \boldsymbol{\omega}. \quad (5.106)$$

◇

### 5.7.2 Propriétés du tenseur des vitesses de déformation

La discussion présentée dans la Sect. 5.5.4 s'applique aussi au tenseur des vitesses de déformation. Remarquons ainsi que  $\text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est égal à la vitesse de variation relative de volume  $d/dt(\Delta V/V)$ . On peut exprimer  $\text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  comme la divergence du champ de vitesse de déformation :

$$\text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{u}. \quad (5.107)$$

### 5.7.3 Relation linéaire entre contraintes et vitesses de déformation

Dans le cas général, la vitesse de déformation dans une direction donnée n'est pas forcément le résultat d'une contrainte dans la même direction : il y a anisotropie. Ainsi, la relation linéaire la plus générale entre le tenseur des contraintes et les vitesses de déformation est

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}, t) = M_{ij}{}^{kl}(\mathbf{x}, t)\dot{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}, t). \quad (5.108)$$

A nouveau, on suppose les propriétés visqueuses du corps identiques en tout point, c'est-à-dire que  $\mathbf{M}$  ne dépend pas de  $\mathbf{x}$ . De plus, on suppose ces propriétés constantes au cours du temps. Le tenseur  $M_{ij}{}^{kl}$  est appelé *tenseur des coefficients de viscosité*. Dans le cas isotrope et newtonien, la même démarche que celle de la Sect. 5.5.5 fournit

$$\tau_{ij} = \underbrace{a'}_{\doteq 2\eta} \dot{\varepsilon}_{ij} + \underbrace{\frac{b' - a'}{3}}_{\doteq \xi - \frac{2}{3}\eta} \delta_{ij} \text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.109)$$

où  $\eta$  est le *coefficient de viscosité de cisaillement* (ou *coefficient de viscosité dynamique*) et  $\xi$  le *coefficient de viscosité volumique*, parfois aussi appelé *second coefficient de viscosité*. Ces coefficients se trouvent par l'expérience. Nous voyons que l'Eq. (5.109) peut se réécrire sous la forme

$$\tau_{ij} = 2\eta \left( \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \xi \delta_{ij} \text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.110)$$

c'est-à-dire en la somme d'un terme purement hors diagonal et d'un second purement diagonal décrivant la viscosité volumique.

## 5.8 Equation de la visco-élasticité isotrope linéaire

Jusqu'à présent, nous avons présenté l'étude des propriétés élastiques et visqueuses séparément. Or comme mentionné auparavant, un corps révèle dans le cas général à la

fois des caractéristiques visqueuses et élastiques. La théorie étant linéaire, nous pouvons additionner au tenseur des contraintes du système visco-élastique les contributions individuelles de chaque tenseur. Un éventuel terme additionnel dû au couplage visco-élastique serait alors forcément de la forme  $\varepsilon \cdot \dot{\varepsilon}$ , soit du second ordre et qui peut par conséquent être négligé. Ainsi, les Eqs. (5.88) et (5.109) donnent

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij} \text{Tr } \varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right) \delta_{ij} \text{Tr } \dot{\varepsilon}, \quad (5.111)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé,  $\eta$  le coefficient de viscosité dynamique, et  $\xi$  le coefficient de viscosité volumique.

### 5.8.1 Ondes élastiques dans un milieu homogène isotrope

Nous désirons étudier la propagation d'ondes élastiques non amorties par la viscosité dans un milieu homogène en l'absence de force extérieure. La densité de forces volumiques  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  étant alors nulle, la condition d'équilibre (5.35) s'écrit

$$-\partial_j \tau^j_i = f_i(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.112)$$

Néanmoins, nous désirons étudier l'aspect dynamique de la propagation d'une onde, et il faut donc généraliser la condition d'équilibre statique au cas qui nous intéresse. Pour ceci, comme abordé dans la Sect. 5.5.2.1, on décrit le système dynamique comme étant à l'équilibre s'il est soumis à la force fictive  $-\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\mathbf{p}$  étant l'impulsion. Une analogie est le principe de d'Alembert qui est la généralisation du principe des travaux virtuels à la dynamique par l'ajout de la force  $-\dot{\mathbf{p}}$  permettant de considérer le système dynamique à l'équilibre. Introduisons donc la fonction de déplacement  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  du point  $\mathbf{x}$  au temps  $t$ , ainsi que la densité volumique constante  $\rho$  du matériau homogène. La densité de forces extérieures "fictive" est donc

$$f_i(\mathbf{x}, t) = -\dot{p}_i = -\frac{d}{dt} \rho \dot{s}_i(\mathbf{x}, t) = -\rho \ddot{s}_i(\mathbf{x}, t). \quad (5.113)$$

La condition d'équilibre devient ainsi une équation du mouvement pour le déplacement  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\partial_j \tau^j_i = \rho \ddot{s}_i(\mathbf{x}, t). \quad (5.114)$$

Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  dans le cas purement élastique s'obtient de l'Eq. (5.111) en posant  $\eta = \xi = 0$ , qui inséré dans l'Eq. (5.114) donne

$$\rho \ddot{s}_i(\mathbf{x}, t) - \partial_j \left( 2\mu \varepsilon^j_i + \lambda \delta^j_i \text{Tr } \varepsilon \right) = 0. \quad (5.115)$$

Or par définition

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.116)$$

qui dans l'Eq. (5.115) donne

$$\rho \ddot{s}_i(\mathbf{x}, t) - \mu \partial^j \partial_j s_i - \mu \partial_i \partial^j s_j - \lambda \partial_i \partial^j s_j = 0, \quad (5.117)$$

ce qui vectoriellement s'écrit

$$\rho \ddot{\mathbf{s}} - \mu \Delta \mathbf{s} - (\mu + \lambda) \mathbf{grad} \text{ div } \mathbf{s} = 0. \quad (5.118)$$

Utilisant l'identité vectorielle  $-\Delta = \mathbf{rot} \mathbf{rot} - \mathbf{grad} \text{ div}$ , l'Eq. (5.118) prend la forme

$$\rho \ddot{\mathbf{s}} + \mu \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{s} - (2\mu + \lambda) \mathbf{grad} \text{ div } \mathbf{s} = 0. \quad (5.119)$$

La solution de cette équation se trouve en faisant appel au théorème de Helmholtz (cf. annexe A.11). Ainsi, pour tout champ vectoriel  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  il existe un *champ irrotationnel* (c'est-à-dire un *champ longitudinal*)  $\mathbf{s}_1$  et un *champ incompressible* (c'est-à-dire un *champ transverse*)  $\mathbf{s}_2$  tels que  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ ,  $\mathbf{rot} \mathbf{s}_1 = 0$  et  $\text{div} \mathbf{s}_2 = 0$ . Appliquons cette décomposition à l'Eq. (5.119) dans le cas d'ondes planes et associons une interprétation physique aux composantes irrotationnelles et incompressibles. Rappelons qu'une onde plane est caractérisée par une direction d'oscillation (de vecteur unité noté  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ) et une direction de propagation (de vecteur unité noté  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ). Ainsi la forme cherchée de la solution est

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{e}}_1 f(\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2, t). \quad (5.120)$$

L'interprétation des composantes irrotationnelle et incompressible reviendra à caractériser les orientations relatives de  $\hat{\mathbf{e}}_1$  et  $\hat{\mathbf{e}}_2$ . Utilisons aussi dans la suite la notation  $r = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$ .

- i) **Champ longitudinal (irrotationnel).** Supposons que  $\mathbf{rot} \mathbf{s} = 0$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$ . Utilisant l'identité vectorielle

$$\mathbf{rot}(\mathbf{a}\phi) = \phi \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{grad} \phi, \quad (5.121)$$

il vient

$$\mathbf{rot} \mathbf{s} \stackrel{(5.120)}{=} \mathbf{rot}(\hat{\mathbf{e}}_1 f) \stackrel{(5.121)}{=} f \underbrace{\mathbf{rot} \hat{\mathbf{e}}_1}_{=0} - \hat{\mathbf{e}}_1 \times \underbrace{\mathbf{grad} f}_{=\hat{\mathbf{e}}_2 \partial_r f(r,t)} = -\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial}{\partial r} f(r, t). \quad (5.122)$$

Or nous avons choisi une solution telle que  $\mathbf{rot} \mathbf{s} = 0$ , ce qui impose  $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = 0$ . Par conséquent, la direction de propagation est parallèle à la direction d'oscillation, d'où

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (5.123)$$

$\mathbf{s}_1$  est donc la *composante longitudinale* du champ  $\mathbf{s}$ . Cherchons à présent l'équation à laquelle doit satisfaire le champ longitudinal. On a :

$$\text{div} \mathbf{s} = \text{div}(\hat{\mathbf{e}}_1 f) = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{1i} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2}_{\stackrel{(5.123)}{=} 1} \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (5.124)$$

d'où

$$\mathbf{grad} \text{div} \mathbf{s} \stackrel{(5.124)}{=} \mathbf{grad} \frac{\partial f}{\partial r} = \hat{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}. \quad (5.125)$$

Comme par hypothèse  $\mathbf{rot} \mathbf{s} = 0$ , les Eqs. (5.120) et (5.125) dans (5.119) donnent

$$\hat{\mathbf{e}}_2 \left[ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(r, t) - (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, t) \right] = 0, \quad (5.126)$$

ce qui implique

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2\mu + \lambda}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] f(r, t) = 0. \quad (5.127)$$

L'Eq. (5.127) est une *équation d'onde* :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] f(r, t) = 0, \quad (5.128)$$

où  $u$  est la vitesse de propagation de l'onde. En identifiant les Eqs. (5.127) et (5.128) on en tire la vitesse de propagation de l'onde longitudinale notée  $u_{\parallel}$  :

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}. \quad (5.129)$$

ii) **Champ transverse (incompressible)**. Supposons à présent que  $\text{div } \mathbf{s} = 0$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2$ . Utilisant l'identité  $\text{div}(\mathbf{a}\phi) = \phi \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad } \phi$ , on a

$$\text{div } \mathbf{s} = \text{div}(\widehat{\mathbf{e}}_1 f) = \underbrace{f \text{div } \widehat{\mathbf{e}}_1}_{=0} + \widehat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{grad } f = \sum_{i=1}^3 \widehat{e}_{1i} \frac{\partial f}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_i}}_{=\widehat{e}_{2i}} = \widehat{\mathbf{e}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial f}{\partial r}. \quad (5.130)$$

Or nous avons choisi une solution telle que  $\text{div } \mathbf{s} = 0$ , ce qui impose  $\widehat{\mathbf{e}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{e}}_2 = 0$ . Par conséquent, la direction de propagation est orthogonale à la direction d'oscillation, d'où

$$\widehat{\mathbf{e}}_1 \times \widehat{\mathbf{e}}_2 = \widehat{\mathbf{e}}_3. \quad (5.131)$$

$\mathbf{s}_2$  est donc la *composante transverse* du champ  $\mathbf{s}$ . Cherchons à présent l'équation à laquelle doit satisfaire le champ transverse. On a

$$\mathbf{rot } \mathbf{rot } \mathbf{s} = \mathbf{rot } \mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{e}}_1 f) \stackrel{(5.121)}{=} \mathbf{rot} \left( - \underbrace{\widehat{\mathbf{e}}_1 \times \widehat{\mathbf{e}}_2}_{\stackrel{(5.131)}{=} \widehat{\mathbf{e}}_3} \frac{\partial f}{\partial r} \right) = -\widehat{\mathbf{e}}_1 \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, t). \quad (5.132)$$

Or comme par hypothèse  $\text{div } \mathbf{s} = 0$ , l'Eq. (5.132) dans (5.119) donne

$$\widehat{\mathbf{e}}_1 \left[ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(r, t) - \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, t) \right] = 0, \quad (5.133)$$

ce qui implique

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] f(r, t) = 0, \quad (5.134)$$

que l'on identifie avec la forme générique de l'équation d'onde donnée par l'Eq. (5.128) pour en tirer la vitesse de propagation de l'onde transverse notée  $u_{\perp}$  :

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (5.135)$$

Nous voyons qu'aussi bien dans le cas de l'onde transverse que pour l'onde longitudinale l'équation d'onde est de la forme (5.128). Cette équation décrit une propagation, sans déformation. Ainsi la solution générale est la somme d'une *onde progressive* notée  $g_p(r-ut)$  et d'une *onde retardée* notée  $g_r(r+ut)$  :

$$f(r, t) = g_p(r-ut) + g_r(r+ut). \quad (5.136)$$

En effet, la forme (5.136) garantit l'indéformabilité de l'onde de sorte que par translation dans le temps on puisse retrouver l'onde au temps initial. Prenons par exemple une onde progressive uniquement. Au temps  $t$  elle sera décrite par  $f(r, t)$ . Mais nous savons que cette onde est l'image de la condition initiale qui s'est déplacée vers la droite à vitesse  $u$  durant le temps  $t$ . Par conséquent, la distance parcourue sera  $ut$ , et

$$f(r, t) = f(r-ut, t_0=0). \quad (5.137)$$

La discussion est similaire pour l'onde retardée, qui se déplace vers la gauche. On déduit facilement par vérification directe que la forme (5.136) est solution de l'équation d'onde (5.128). En effet, avec  $r(t) = r \pm ut$  selon que l'onde soit progressive ou retardée

respectivement :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(r, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial g_p}{\partial r}(r - ut) \underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{=u} + \frac{\partial g_r}{\partial r}(r + ut) \underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{=-u} \right] \\
&= u \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial g_p}{\partial r}(r - ut) \underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{=u} - \frac{\partial g_r}{\partial r}(r + ut) \underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{=-u} \right] \\
&= u^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} [g_p(r - ut) + g_r(r + ut)] \\
&\stackrel{(5.136)}{=} u^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, t), \tag{5.138}
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(r, t) - u^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, t) = 0. \tag{5.139}$$

Donnons encore quelques valeurs numériques. Pour de l'acier, la densité vaut  $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , le module de Young  $E = 2.4 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , le module de Poisson  $\nu = 0.27$ . Les coefficients de Lamé sont alors donnés par le système d'Eqs. (5.97) :  $\mu = E/[2(1+\nu)] = 9.45 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu) = 1.1 \times 10^{11}$ . Les vitesses de propagation longitudinales et transverses s'obtiennent des Eqs. (5.129) et (5.135) :  $c_{\parallel} = 6.2 \times 10^3 \text{ m/s}$ ,  $c_{\perp} = 3.5 \times 10^3 \text{ m/s}$ .



# Chapitre 6

## Mécanique des fluides

### 6.1 Introduction

Ce chapitre s'adresse à l'étude des fluides les plus communs (gaz, eau, etc.). Ce sont des liquides *newtoniens* pour lesquels, de plus, le module de cisaillement est négligeable. Ce cas correspond à un fluide qui se déforme immédiatement et donc qui n'a pas de contrainte de cisaillement. Donc nous poserons  $\mu = 0$ . Certains fluides tels que le miel, les liquides colloïdaux ou les cristaux liquides n'entrent pas dans cette description simple.

Comme nous l'avons déjà esquissé dans la Sect. 5.2, la description des fluides se fait en termes de variables macroscopiques dites variables hydrodynamiques. Il sera donc nécessaire d'adopter un formalisme de champs et de ne plus étudier la dynamique de chaque particule isolée mais plutôt de leurs mouvements collectifs. La démarche fondamentale permettant d'établir les équations du mouvement de ces champs hydrodynamiques est d'écrire des équations de bilan pour les différentes grandeurs d'intérêt. Ces équations traduisent alors une forme locale des lois de conservation du système.

Le chapitre débute par la description de deux systèmes de référence différents pour décrire l'état du système : les descriptions lagrangienne et eulérienne. La forme générale d'une équation de bilan est alors dérivée. Le bilan de masse conduit à l'équation de continuité alors que le bilan d'impulsion conduit à une équation de mouvement pour le champ de vitesse du fluide, connue sous le nom d'équation de Navier-Stokes. Le cas particulier du fluide parfait conduit aux équations d'Euler et de Bernoulli. L'analyse dimensionnelle permet d'introduire le concept d'écoulements similaires, caractérisés par un même nombre sans dimension, le nombre de Reynolds. Finalement, divers écoulements sont étudiés.

### 6.2 Equations de bilan

#### 6.2.1 Descriptions de Lagrange et de Euler

Nous désirons décrire la dynamique à l'aide de grandeurs locales. Or les milieux considérés sont capables de se déformer. Par conséquent la trajectoire des particules dans ce milieu peut être compliquée selon la nature de la déformation ou de l'écoulement. Afin d'étudier les configurations successives, deux types de systèmes de référence sont envisageables.

### 6.2.1.1 Description de Lagrange

Dans cette description, chaque particule conserve son individualité et est suivie au cours du temps. Ainsi, pour chacune des  $N$  particules on décrit sa dynamique par une fonction  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_{i0}, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , où  $\mathbf{x}_{i0}$  sont les conditions initiales au temps  $t_0$  de la particule  $i$ . Le flot dans un espace en trois dimensions est alors une application de dimension  $3N$ , et associe à chaque coordonnée initiale de la particule sa position au temps  $t$ . Ainsi la position des particules est une fonction explicite du temps et des coordonnées initiales, ces dernières étant par définition constantes. Si le nombre de particules  $N$  devient très grand, on réalise aisément que cette description génère des difficultés techniques considérables. Pour simplifier le problème, on recourt à une description macroscopique en définissant des champs de densité, vitesse, accélération, etc. Le repère de Lagrange se déplace donc avec les particules formant le fluide.

### 6.2.1.2 Description de Euler

En pratique, en raison du grand nombre de particules et de la diffusion moléculaire il est difficile de localiser la trajectoire individuelle de chaque particule. Le physicien qui effectue des mesures au laboratoire a plutôt besoin de savoir ce qui se passe en chaque point du système et à chaque instant. Au lieu de suivre séparément les particules du fluide au cours du temps, on préfère donc décrire les vitesses en chaque point  $\mathbf{x}$  de l'espace pour chaque temps  $t$ . Ainsi, en un point donné  $\mathbf{x}$  on mesure les vitesses des *différentes* particules qui se succèdent dans le temps. Ceci permet alors de définir un champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , d'accélération  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ , de pression  $p(\mathbf{x}, t)$ , de densité  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , etc. Le repère de Euler est donc fixe dans le laboratoire. Cette description est celle que nous adopterons dans la suite.

## 6.2.2 Dérivée matérielle ou substantielle

Commençons par étudier le cas de l'accélération pour ensuite généraliser à d'autres observables. L'accélération est définie par la variation de vitesse d'une même particule dans un temps infinitésimal. Ceci se conçoit facilement dans la description de Lagrange pour laquelle chaque particule garde son individualité. Il n'en est pas de même dans la description de Euler qui recourt à un formalisme de champs. Ainsi, l'accélération dans les variables de Euler ne s'exprime pas par

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (6.1)$$

En effet, cette dernière écriture correspond à la variation de la vitesse en un point donné  $\mathbf{x}$  constant. Or dans la description de Euler,  $\Delta \mathbf{v}$  est la différence entre les vitesses de deux particules *distinctes* passant au même point à des instants voisins. La dérivée partielle indique donc comment varie le champ de vitesse au cours du temps en un point fixe. Au contraire, par définition l'accélération que nous devons calculer est la différence des valeurs de la vitesse d'une *même* particule. Comment le formaliser avec une description de champs ? Si cette particule est en  $\mathbf{x}$  au temps  $t$  et en  $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$  au temps  $t + \Delta t$ , alors

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (6.2)$$

Comme  $|\Delta \mathbf{x}|$  et  $\Delta t$  sont supposés petits, on réalise un développement de Taylor au premier ordre :

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \mathcal{O}(|\Delta \mathbf{x}|^2). \quad (6.3)$$



Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \\ \implies \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

On dit de la dérivée de l'Eq. (6.4) qu'il s'agit de la *dérivée matérielle*, ou *dérivée substantielle*. On la note parfois  $D\mathbf{v}/Dt$ . Du point de vue mathématique, l'Eq. (6.4) n'est rien d'autre que la dérivée totale par rapport au temps de la fonction  $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$ . Nous pouvons ainsi facilement généraliser l'Eq. (6.4) à n'importe quelle observable scalaire  $f(\mathbf{x}, t)$  :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f. \quad (6.5)$$

De façon similaire, pour une observable vectorielle  $\mathbf{F}$  :

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}. \quad (6.6)$$

La dérivée substantielle de  $f$  (ou  $\mathbf{F}$ ) s'interprète donc comme la variation de la grandeur  $f$  sous réserve de suivre les particules constituant  $f$  et se déplaçant à vitesse  $\mathbf{v}$ . Il s'agit donc bien de l'analogie de la dérivée totale selon Lagrange (où chaque particule garde son individualité), mais exprimé dans un formalisme de champs.

### 6.2.3 Forme générale de l'équation de bilan

Cette approche est très utilisée dans divers domaines de la physique et en particulier dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles [25, 27].

L'idée est la suivante : on considère une grandeur  $\mathcal{A}$  *extensive* définie comme une intégrale sur un volume  $V$  d'une densité locale  $\rho_{\mathcal{A}}$ . La variation temporelle de  $\mathcal{A}$  a deux causes : la première est le flux qui entre (ou sort) à travers la surface fermée  $S$  entourant le volume  $V$ , la seconde provient des pertes ou sources locales de  $\rho_{\mathcal{A}}$  à l'intérieur du volume  $V$ .

**Définition 6.1** Soit  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$  une décomposition disjointe du domaine  $\Lambda$ , alors une grandeur  $\mathcal{A}$  est dite **extensive** si pour toute décomposition disjointe de  $\Lambda$  sa valeur dans le système  $\Lambda$  est égale à la somme de sa valeur dans  $\Lambda_1$  et de celle dans  $\Lambda_2$ .

Par exemple, la masse et la charge électrique sont des grandeurs extensives. Par contre, la pression et la température ne sont pas extensives.

Soit  $V \subset \mathbb{R}^3$  un volume de mesure finie délimité par la surface  $S$ . Soit  $\mathcal{A}(t)$  une grandeur extensive de densité volumique  $\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\mathcal{A}(t) = \int_V d\mathbf{x} \rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t). \quad (6.7)$$

La variation de  $\mathcal{A}$  dans  $V$  est donc due à deux contributions :

- i) Le flux à travers la surface  $S$  : pour faire le bilan de la grandeur  $\mathcal{A}$  à travers  $S$ , on somme sur toute la surface  $S$  la composante normale du flux  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}$  de la grandeur  $\mathcal{A}$  (cf. Fig 6.1) :

$$\left. \frac{d\mathcal{A}}{dt} \right|_{\text{flux}} = - \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t). \quad (6.8)$$

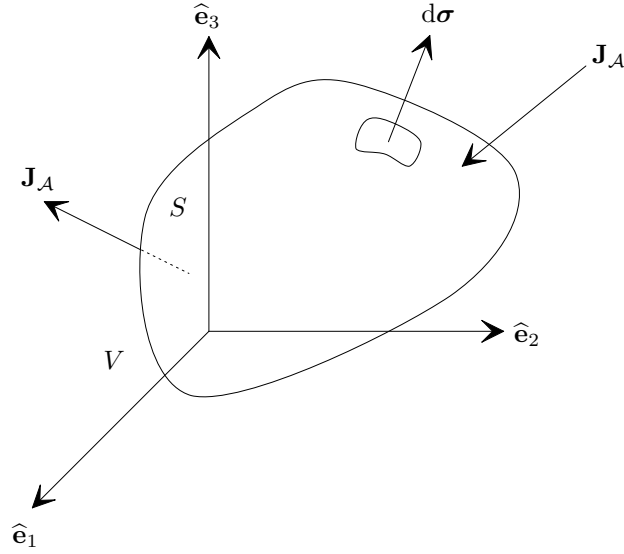


FIG. 6.1 – Equation de bilan.

L'élément de surface  $d\sigma$  est dirigé vers l'extérieur de la surface. Expliquons la présence du signe négatif devant cette contribution. Si le produit scalaire entre  $d\sigma$  et  $\mathbf{J}_A$  est positif, cela signifie qu'il y a un flux sortant donc la contribution à  $dA/dt$  doit être négative. D'autre part, si  $d\sigma \cdot \mathbf{J}_A < 0$  il y a un flux entrant et la contribution doit être positive (comme représenté sur la Fig. 6.1).

- ii) La production (ou perte) de  $\mathcal{A}$  dans  $V$  : notons  $\sigma_A(\mathbf{x}, t)$  l'ensemble de toutes les sources et puits de la grandeur  $\mathcal{A}$  au point  $\mathbf{x}$  au temps  $t$ , alors

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{\text{source}} = \int_V d\mathbf{x} \sigma_A(\mathbf{x}, t). \quad (6.9)$$

On peut trouver des termes de puits ou de source dans les réactions chimiques par exemple. En effet, dans ce cas si  $\mathcal{A}$  est la concentration d'une espèce chimique qui réagit avec d'autres espèces pour s'annihiler ou se créer dans  $V$ , alors  $\sigma_A$  est non nul.

Les contributions des Eqs. (6.8) et (6.9) sont additives et donnent

$$\frac{dA}{dt} = - \int_S d\sigma \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{x}, t) + \int_V d\mathbf{x} \sigma_A(\mathbf{x}, t). \quad (6.10)$$

Or comme nous sommes dans un référentiel eulérien le volume  $V$  est constant et indépendant du temps, donc l'Eq. (6.7) donne

$$\frac{dA}{dt} \stackrel{(6.7)}{=} \frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{x} \rho_A(\mathbf{x}, t) = \int_V d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \rho_A(\mathbf{x}, t). \quad (6.11)$$

Dans le membre de droite de l'Eq. (6.11) apparaît une dérivée partielle plutôt qu'une dérivée totale. En effet, on ne suit pas les particules mais regarde la variation de  $\rho_A$  dans le volume  $V$  fixé. Insérant l'Eq. (6.11) dans (6.10) il vient

$$\int_V d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \rho_A(\mathbf{x}, t) = - \underbrace{\int_S d\sigma \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{x}, t)}_{= \int_V d\mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{J}_A} + \int_V d\mathbf{x} \sigma_A(\mathbf{x}, t), \quad (6.12)$$

où on a fait usage du théorème de la divergence. La relation (6.12) étant vraie pour tout volume  $V$ , on en tire la forme locale de l'équation de bilan de la grandeur  $\mathcal{A}$  :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{div} \mathbf{J}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t) + \sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t).} \quad (6.13)$$

En général, le flux convectif  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}$  s'écrit comme le produit de la densité locale de la grandeur  $\mathcal{A}$ ,  $\rho_{\mathcal{A}}$ , par la vitesse  $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$  de transport de l'espèce  $\mathcal{A}$  :

$$\mathbf{J}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t) = \rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t). \quad (6.14)$$

### 6.2.4 Le bilan de masse

Une équation de bilan particulièrement importante est celle pour laquelle l'observable extensive  $\mathcal{A}$  est la masse  $\mathcal{A} = M(t)$ . Dans ce cas, le flux de masse est

$$\mathbf{J}_M(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (6.15)$$

où  $\rho(\mathbf{x}, t)$  est la densité de masse du fluide et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  la vitesse de l'écoulement. En l'absence de réactions chimiques ou nucléaires, il n'y a pas de termes sources et donc l'Eq. (6.13) devient l'équation de continuité :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}).} \quad (6.16)$$

**Définition 6.2** *Un fluide est dit **incompressible** si sa densité est constante :*

$$\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (6.17)$$

**Lemme 6.1** *Soit un fluide incompressible sans termes de source ni de perte de matière, alors la divergence du champ de vitesse est nulle :*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (6.18)$$

**Preuve:** rappelons que la description est celle de Euler, donc  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ . Développant le membre de droite de l'Eq. (6.16) il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho \\ \implies \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho}_{\stackrel{(6.5)}{=} \frac{d\rho}{dt}} &= -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Par conséquent, si  $d\rho(\mathbf{x}, t)/dt = 0$  alors  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , ce qui achève la preuve. ■

Remarquons que si le fluide est incompressible, alors la densité  $\rho$  est homogène donc  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho = 0$ . Ainsi l'Eq. (6.19) donne  $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t = 0$ .

### 6.2.5 Le bilan de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement correspond à la forme locale de l'équation de Newton

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (6.20)$$

où  $\mathbf{P}$  est l'impulsion totale du système et  $\mathbf{F}$  la résultante des forces appliquées. Localement, les forces agissant sur un élément de volume sont issues de deux contributions :

- i) Les forces volumiques, comme par exemple les forces à longue portée telles la gravitation et les forces électromagnétiques.
- ii) Les tensions locales exercées sur la surface de l'élément de volume. Dans le cadre des hypothèses émises, ces tensions sont décrites par le tenseur des tensions  $\tau_{ij}$  de l'Eq. (5.111).

Comme énoncé en introduction, la classe des fluides dont nous proposons l'étude est caractérisée par un module de cisaillement nul  $\mu = 0$ . Ceci signifie qu'il n'y a pas de contraintes tangentielles élastiques. Ainsi l'Eq. (5.111) s'écrit

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{Tr } \varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right) \delta_{ij} \text{Tr } \dot{\varepsilon}. \quad (6.21)$$

De plus, comme le montre le lemme 5.3, en l'absence de contraintes tangentielles élastiques, la seule contribution élastique est de type compression uniforme d'où  $\lambda \text{Tr } \varepsilon = -p$  et l'Eq. (6.21) devient

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right) \delta_{ij} \text{Tr } \dot{\varepsilon}. \quad (6.22)$$

Or en remarquant que

$$\text{Tr } \dot{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{v}, \quad (6.23)$$

l'Eq. (6.22) devient

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right) \delta_{ij} \text{div } \mathbf{v}. \quad (6.24)$$

Nous proposons d'abord la dérivation de l'équation de bilan de la quantité de mouvement dans le cas général, dont la particularisation aboutit à l'équation de *Navier-Stokes*. Cette dérivation illustre une approche très générale en physique qui consiste à écrire des équations de bilan. La seconde dérivation de l'équation de Navier-Stokes se base sur l'équation de Newton qui sera appliquée au cas du fluide visqueux. Nous particularisons ensuite l'équation de Navier-Stokes à différents écoulements d'intérêt.

#### 6.2.5.1 Le fluide visqueux : l'équation de Navier-Stokes

**Dérivation exploitant le bilan d'impulsion.** Soit un volume  $V \subset \mathbb{R}^3$  de surface  $S$ , soit l'observable extensive impulsion  $\mathcal{A} = \mathbf{P}$ , soit  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la densité volumique de masse, alors la densité volumique d'impulsion est  $\rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et

$$\mathbf{P}(t) = \int_V d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (6.25)$$

Les contributions à la variation temporelle de  $\mathbf{p}$  dans  $V$  sont de deux sortes :

- i) Les contributions de surface :
  - a) Le flux d'impulsion à travers la surface  $S$  est donné par

$$\left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_{\text{impulsion}} = - \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{p}, \text{conv}} = - \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}), \quad (6.26)$$

où  $\mathbf{J}_{\mathbf{p},\text{conv}}$  est le flux d'impulsion convectif et  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  le tenseur d'éléments  $v_i v_j$  (cf. annexe A.12). La forme de  $\mathbf{J}_{\mathbf{p},\text{conv}}$  se justifie par l'Eq. (6.14). En effet, le membre de droite de l'Eq. (6.26) ainsi que  $d\boldsymbol{\sigma}$  sont des tenseurs de rang 1, par conséquent  $\mathbf{J}_{\mathbf{p},\text{conv}}$  doit être un tenseur de rang 2. Or comme  $\rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et par la forme générale du flux de l'Eq. (6.14), il faut que  $\mathbf{J}_{\mathbf{p},\text{conv}} = \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ .

b) Par l'équation de Newton (6.20), les tensions de surface donnent

$$\left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_{\text{tensions}} = \int_S d\mathbf{F}_S \stackrel{(5.29)}{=} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (6.27)$$

Comme on le verra plus loin, cette contribution est issue de la partie diffusive  $\mathbf{J}_{\mathbf{p},\text{diff}}$  du flux d'impulsion.

ii) Les contributions volumiques : soit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  la force volumique par unité de masse, alors

$$\left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_{\text{volume}} = \int_V d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (6.28)$$

Les diverses contributions des Eqs. (6.26), (6.27), et (6.28) étant additives, on a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) \stackrel{(6.25)}{=} \frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = - \int_S d\boldsymbol{\sigma} \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_V d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (6.29)$$

A nouveau, dans la description de Euler le volume  $V$  est indépendant du temps d'où

$$\int_V d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = - \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_V d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (6.30)$$

Utilisant le théorème de la divergence sur un champ tensoriel d'ordre deux  $\mathbf{A}$  (cf. annexe A.12)

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \int_V d\mathbf{x} \text{Div } \mathbf{A}, \quad (6.31)$$

où on note  $\text{Div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ , il vient

$$\int_V d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = - \int_V d\mathbf{x} \text{Div} [\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau}] + \int_V d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (6.32)$$

Cette relation étant vraie pour tout volume  $V$ , la forme locale de l'Eq. (6.32) est

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = - \text{Div} [\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau}] + \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t).} \quad (6.33)$$

L'Eq. (6.33) est la forme générale de l'équation de Navier-Stokes exprimée comme équation de bilan d'impulsion (cf. Eq. (6.13)). Remarquons que la comparaison de l'Eq. (6.33) à la forme locale générale de l'équation de bilan (6.13) permet de conclure que le courant d'impulsion total est

$$\mathbf{J}_{\mathbf{p}} = \underbrace{\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}_{=\mathbf{J}_{\mathbf{p},\text{conv}}} + \underbrace{(-\boldsymbol{\tau})}_{=\mathbf{J}_{\mathbf{p},\text{diff}}}. \quad (6.34)$$

L'avantage de cette formulation est qu'il n'est pas encore fait usage d'une forme explicite du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$ . Ainsi on pourrait envisager une relation encore plus générale que celle de l'Eq. (6.24).

Néanmoins, il peut être utile de développer l'Eq. (6.33). Utilisant la forme (6.24) du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  on a

$$\text{Div } \boldsymbol{\tau} = \text{Div} \left[ -p\mathbb{1} + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right) \mathbb{1} \text{div } \mathbf{v} \right]. \quad (6.35)$$

Développons les différents termes apparaissant dans l'Eq. (6.35). On a

$$\mathbf{Div}(-p\mathbf{1}) = - \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial(p\mathbf{1})_j}{\partial x_j} = - \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} = - \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = - \mathbf{grad} p, \quad (6.36)$$

et de même

$$\mathbf{Div} \left[ \left( \xi - \frac{2}{3}\eta \right) \mathbf{1} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] = \left( \xi - \frac{2}{3}\eta \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (6.37)$$

Finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{Div} (2\eta\dot{\mathbf{e}}) &= 2\eta \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_{ij}}{\partial x_j} \\ &= 2\eta \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \eta \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \eta \underbrace{\sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x_j}}_{=\Delta \mathbf{v}} + \eta \underbrace{\sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}}_{=\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}} \\ &= \eta \Delta \mathbf{v} + \eta \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Les Eqs. (6.36), (6.37), et (6.38) dans (6.35) donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{Div} \boldsymbol{\tau} &= - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \eta \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \left( \xi - \frac{2}{3}\eta \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Insérant l'Eq. (6.39) dans l'équation de Navier-Stokes (6.33) il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = - \mathbf{Div} [\rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}. \quad (6.40)$$

Remarquons aussi que

$$\begin{aligned} \mathbf{Div} [\rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] &= \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})]_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i v_i}_{=\mathbf{v}} \underbrace{\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_j}_{=\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i}_{=\rho \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i v_i}_{=\mathbf{v}}} \\ &= \mathbf{v} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

On voit aussi que le second terme de l'Eq. (6.41) peut s'écrire avec un grand gradient sous la forme  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\mathbf{Grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$  (cf. annexe A.12). Insérant l'Eq. (6.41) dans (6.40) on a

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\mathbf{v} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \\ \implies \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\right)}_{\stackrel{(6.16)}{=} 0} &= -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}, \end{aligned}$$

d'où la forme finale de l'équation de Navier-Stokes

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{f}.} \quad (6.42)$$

Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire aux dérivées partielles, donc particulièrement difficile à résoudre en général. C'est pourquoi on considère souvent différentes approximations, dont nous mentionnons les plus courantes ci-dessous. Certaines seront abordées plus en détail dans les sections qui suivent.

- Le fluide est dit *incompressible* si la densité  $\rho$  est constante. Dans ce cas  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  (cf. lemme 6.1), et l'équation de Navier-Stokes devient

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}} \quad (6.43)$$

où on a défini la *viscosité cinématique* par

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (6.44)$$

- Le fluide est dit *parfait* s'il n'est pas visqueux :  $\eta = \xi = 0$ . Dans ce cas l'équation de Navier-Stokes prend la même forme (6.43) que pour le fluide incompressible, avec de plus  $\nu = 0$ .
- L'écoulement est *permanent*, ou *stationnaire*, si  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ .

**Attention :** l'introduction des opérateurs **Div** et **Grad** a été réalisée dans un but pédagogique uniquement (et cette notation se retrouve dans certains ouvrages spécialisés). En effet, il n'est mathématiquement pas nécessaire d'introduire ces nouvelles définitions. Si on définit les opérateurs différentiels par la multiplication matricielle avec  $\nabla$ , alors tous ces opérateurs gardent la même forme indépendamment du rang de l'objet sur lequel ils agissent. Le but est d'attirer l'attention sur le fait que les opérateurs différentiels prennent une expression différente selon le choix des coordonnées curvilignes, et en tout cas une forme très différente des coordonnées cartésiennes, comme montré dans l'annexe A.13.

**Dérivation alternative de l'équation de Navier-Stokes.** Cette dérivation ne fait pas appel explicitement aux équations de bilan mais applique directement l'équation de Newton au liquide contenu dans un volume donné. Les ingrédients physiques sont évidemment *les mêmes que dans la dérivation précédente*.

Isolons un volume fluide  $V$  de surface  $S$ , et remplaçons l'effet du reste du fluide par des forces de surface (cf. Fig. 6.2).

La forme générique de l'équation de Newton est :

$$\sum_{i \geq 1} \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}. \quad (6.45)$$

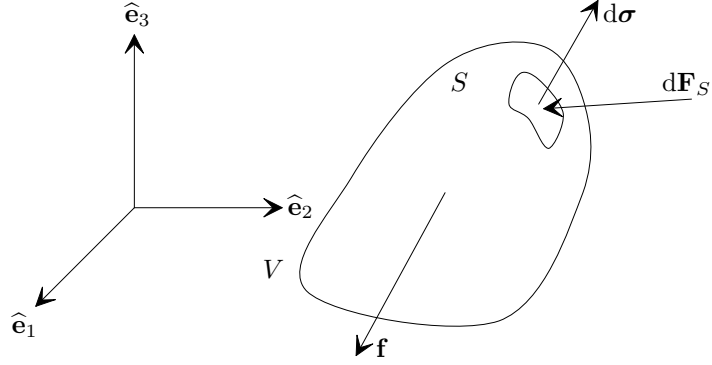


FIG. 6.2 – Dérivation de l'équation de Navier-Stokes.

Dans notre cas, l'accélération est celle de la masse de fluide issue de  $V$  :

$$m\mathbf{a} = \int_V d\mathbf{x} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (6.46)$$

avec  $d\mathbf{v}/dt$  exprimé selon Euler :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (6.47)$$

La somme des forces est formée de deux contributions : les forces de volume

$$\mathbf{F}_V = \int_V d\mathbf{x} \rho \mathbf{f}, \quad (6.48)$$

et les forces de surface  $\mathbf{F}_S$ . Ces dernières sont données par l'Eq. (5.29) :  $dF_{S,j} = \tau^j_i d\sigma_i$ , que l'on intègre sur la surface puis utilise l'analyse vectorielle pour faire porter l'intégration sur le volume  $V$ . Ainsi

$$dF_{S,i} \stackrel{(5.29)}{=} \tau^j_i d\sigma_j \stackrel{(6.24)}{=} -p\delta_{ij} d\sigma_j + 2\eta \varepsilon_{ij} d\sigma_j + \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right) \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} d\sigma_j, \quad (6.49)$$

d'où utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_S &= \int_S d\mathbf{F}_S \\ &\stackrel{(6.49)}{=} - \int_S \underbrace{p \delta_{ij} d\sigma_j \hat{\mathbf{e}}_i}_{= \int_V d\mathbf{x} \operatorname{grad} p} + \underbrace{2\eta \int_S \varepsilon_{ij} d\sigma_j \hat{\mathbf{e}}_i}_{= 2\eta \int_S \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\sigma_j \hat{\mathbf{e}}_i} + \underbrace{\left(\xi - \frac{2\eta}{3}\right) \int_S \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} d\sigma_j \hat{\mathbf{e}}_i}_{= \int_V d\mathbf{x} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}} \\ &= - \int_V d\mathbf{x} \operatorname{grad} p + \eta \int_V d\mathbf{x} \underbrace{\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \hat{\mathbf{e}}_i}_{= \Delta \mathbf{v}} + \eta \int_V d\mathbf{x} \underbrace{\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_i}_{= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}} + \left(\xi - \frac{2\eta}{3}\right) \int_V d\mathbf{x} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= - \int_V d\mathbf{x} \operatorname{grad} p + \eta \int_V d\mathbf{x} \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \int_V d\mathbf{x} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

On insère les Eqs. (6.46), (6.47), (6.48) et (6.50) dans l'équation de Newton (6.45). Puis la relation obtenue étant vraie pour tout volume  $V$  la forme locale ainsi obtenue est

$$\boxed{\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} = - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f},} \quad (6.51)$$



ce qui est bien l'équation de Navier-Stokes (6.42). A nouveau, pour exprimer cette équation en coordonnées curvilignes, il faut obtenir les opérateurs différentiels dans le repère désiré (cf. annexe A.13).

### 6.2.5.2 Le fluide parfait : l'équation de Euler

Une caractéristique du fluide visqueux est de suivre les parois rigides. Ceci n'est plus vrai pour le fluide parfait qui par définition n'est pas visqueux, c'est-à-dire  $\eta = \xi = 0$ . Dans ce cas, l'équation de Navier-Stokes (6.42) se réduit à l'équation de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{f}. \quad (6.52)$$

Malgré ces simplifications, il s'agit toujours d'une équation non linéaire donc en général difficile à résoudre.

### 6.2.5.3 Le fluide parfait stationnaire incompressible : l'équation de Bernoulli

Le fluide est dit stationnaire si l'écoulement ne dépend pas du temps, c'est-à-dire si  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ . L'équation de Euler (6.52) se réduit à

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p = \mathbf{f}. \quad (6.53)$$

L'équation de Bernoulli requiert l'hypothèse supplémentaire selon laquelle la force volumique  $\mathbf{f}$  dérive d'un potentiel  $\phi$  :

$$\mathbf{f} = -\mathbf{grad} \phi. \quad (6.54)$$

Utilisant l'identité

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (6.55)$$

ainsi que l'Eq. (6.54) dans (6.53) il vient

$$\frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{grad} \phi = 0. \quad (6.56)$$

Considérons à présent une *ligne de courant*. Une ligne de courant est telle qu'en tout point sa tangente est parallèle à la vitesse du fluide. (cf. Fig. 6.3).

Intégrons l'Eq. (6.56) le long d'une telle ligne :

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} ds \cdot \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{v}^2) - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} ds \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} ds \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} ds \cdot \mathbf{grad} \phi = 0. \quad (6.57)$$

Or par définition de la ligne de courant, cette dernière peut être paramétrisée par  $ds = \mathbf{v} dt$ . Ainsi

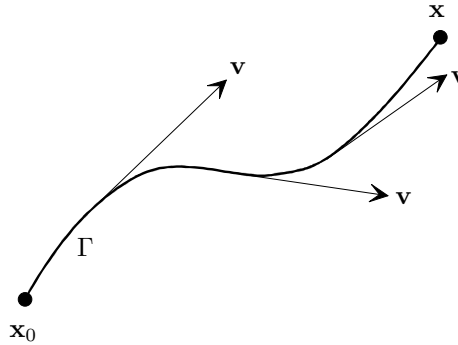
$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} ds \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}. \quad (6.58)$$

Or pour des vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , et  $\mathbf{c}$  on a l'identité vectorielle

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \quad (6.59)$$

qui dans notre cas  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$  et  $\mathbf{c} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$  donne

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) = \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{v})}_{=0} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (6.60)$$

FIG. 6.3 – Ligne de courant  $\Gamma$ .

L'Eq. (6.60) dans (6.58) donne

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (6.61)$$

D'autre part, la densité  $\rho$  étant par hypothèse constante

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{ds} \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{grad} \frac{p}{\rho}. \quad (6.62)$$

Les Eqs. (6.61) et (6.62) dans (6.57) donnent

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} + \phi \right) = 0. \quad (6.63)$$

Intégrant l'Eq. (6.63) le long de la ligne de courant considérée et passant dans le membre de droite toutes les constantes dues au point  $\mathbf{x}_0$ , notées *cte* (cette constante peut différer d'une ligne de courant à l'autre), on obtient l'*équation de Bernoulli* :

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \phi = \text{cte}.} \quad (6.64)$$

Cette équation est une forme de la conservation de l'énergie, où *cte* a donc les dimensions d'une énergie volumique. L'équation de Bernoulli est aussi valable pour des écoulements rotationnels  $\mathbf{rot} \mathbf{v} \neq 0$ . Examinons à présent quelques cas particuliers de l'Eq. (6.64).

### Exemples:

- *Débitmètre de Venturi* : soit un tube horizontal formé d'une section de grand diamètre  $S_0$  et de petit diamètre  $S_1$ . La région de diamètre  $S_i$  est caractérisée par une pression  $p_i$ , et le liquide s'y déplace à vitesse  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 0, 1$  (cf. Fig. 6.4).

Nous désirons trouver le débit en fonction des pressions  $p_i$  et des sections  $S_i$ . En se plaçant sur la ligne de courant correspondant à l'axe de symétrie, en écrivant l'équation de Bernoulli dans les régions de pressions  $p_1$  et  $p_2$ , puis égalant ces expressions il vient

$$\frac{1}{2} v_0^2 + \frac{1}{\rho} p_0 = \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{1}{\rho} p_1. \quad (6.65)$$

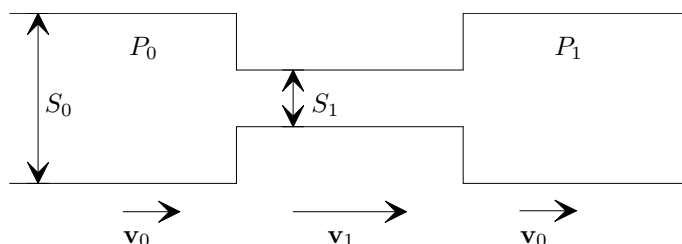


FIG. 6.4 – Débitmètre de Venturi.

D'autre part, le fluide étant incompressible, le débit  $D$  est constant :  $D = S_0 v_0 = S_1 v_1$ , d'où

$$v_1 = \frac{S_0}{S_1} v_0. \quad (6.66)$$

Substituant l'Eq. (6.66) dans (6.65), puis tirant  $v_0$  de cette dernière équation il vient :

$$D = S_0 v_0 = S_0 S_1 \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{S_0^2 - S_1^2}}. \quad (6.67)$$

- Etudions encore une application bien concrète. Dans le haut-Valais, on observe des chalets de montagne (mayens) avec de lourdes pierres posées sur leur toit. En effet, il est connu que dans cette région il peut y avoir de fortes tempêtes. Or comme nous l'avons compris par l'exemple précédent, si la vitesse du fluide augmente la pression diminue. Par conséquent, l'air pouvant être considéré comme un fluide à faible densité, lors de fortes tempêtes la vitesse du vent sur les toits est telle que la pression diminue très fortement sur le côté extérieur du toit. D'autre part, la pression du côté intérieur est bien supérieure car l'air y est au repos. Par conséquent, il existe une différence de pression telle que la force résultante peut arracher un toit, d'où la présence de lourdes pierres pour minimiser ce risque.

◇

### 6.3 Lois de similitude et nombre de Reynolds

Reprenons l'équation de Navier-Stokes incompressible (6.43) sans forces de volume :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (6.68)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (6.69)$$

Nous choisissons cette forme des équations de Navier-Stokes dans la discussion qui suit pour des raisons d'allègement d'écriture. On peut aussi considérer le cas compressible avec forces de volume.

Les lois physiques doivent être indépendantes du choix d'unités. Par conséquent, il est instructif d'exprimer les grandeurs sous forme adimensionnelle. Dans le cas présent, ceci va permettre d'interpréter l'origine physique de certains termes de l'équation de Navier-Stokes.

Soit une observable quelconque  $a$ . Si on désire mesurer la grandeur  $a$ , alors le résultat de la mesure s'exprime par un nombre réel, noté  $a^{(s)}$ , dans l'unité de  $a$ , notée  $a_0$  :

$$a = a^{(s)} a_0. \quad (6.70)$$

Par exemple, notons :

$$\begin{aligned}
 \text{longueur : } x &= x^{(s)}L, \\
 \text{temps : } t &= t^{(s)}t_0, \\
 \text{vitesse : } v &= v^{(s)}v_0, \\
 \text{densité : } \rho &= \rho^{(s)}\rho_0, \\
 \text{pression : } p &= p^{(s)}p_0, \\
 \text{masse : } m &= m^{(s)}M.
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

Un choix naturel pour les unités  $a_0$  est par exemple

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \frac{L}{t_0}, \\
 p_0 &= \rho_0 v_0^2, \\
 \rho_0 &= ML^{-3}.
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

Insérant les relations (6.71) et (6.72) dans l'Eq. (6.68) il vient

$$\frac{u_0}{t_0} \frac{\partial \mathbf{v}^{(s)}}{\partial t^{(s)}} + \frac{v_0^2}{L} \left( \mathbf{v}^{(s)} \cdot \nabla^{(s)} \right) \mathbf{v}^{(s)} = -\frac{p_0}{\rho_0 L} \frac{1}{\rho^{(s)}} \mathbf{grad}^{(s)} p^{(s)} + \nu \frac{v_0}{L^2} \Delta^{(s)} \mathbf{v}^{(s)}, \tag{6.73}$$

que l'on multiplie par  $t_0/v_0$  :

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(s)}}{\partial t^{(s)}} + \underbrace{\frac{v_0^2 t_0}{v_0 L}}_{=1} \left( \mathbf{v}^{(s)} \cdot \nabla^{(s)} \right) \mathbf{v}^{(s)} = -\underbrace{\frac{p_0 t_0}{p_0 L v_0}}_{=1} \frac{1}{\rho^{(s)}} \mathbf{grad}^{(s)} p^{(s)} + \frac{\nu v_0 t_0}{v_0 L^2} \Delta^{(s)} \mathbf{v}^{(s)}. \tag{6.74}$$

**Définition 6.3** Soit un écoulement caractérisé par une longueur  $L$  et une vitesse  $v_0$ . Soit  $\nu = \eta/\rho$  la viscosité cinématique du liquide. On associe à cet écoulement un nombre adimensionnel appelé le **nombre de Reynolds**  $\mathcal{R}_e$  défini par :

$$\mathcal{R}_e = \frac{Lv_0}{\nu}. \tag{6.75}$$

Utilisant la définition du nombre de Reynolds l'Eq. (6.74) devient

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}^{(s)}}{\partial t^{(s)}} + \left( \mathbf{v}^{(s)} \cdot \nabla^{(s)} \right) \mathbf{v}^{(s)} = -\frac{1}{\rho^{(s)}} \mathbf{grad}^{(s)} p^{(s)} + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta^{(s)} \mathbf{v}^{(s)}}. \tag{6.76}$$

On dit de l'Eq. (6.76) qu'il s'agit de la *forme adimensionnelle* de l'équation de Navier-Stokes (incompressible et sans forces de volume).

Si deux écoulements (de mêmes géométries, conditions aux bords, et conditions initiales) sont caractérisés par un même nombre de Reynolds, alors on dit qu'il s'agit d'*écoulements similaires*. Ce fait est utilisé de manière importante dans l'étude des écoulements autour d'objets en soufflerie par exemple.

Quelle est l'interprétation du nombre de Reynolds ? Ce dernier peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{R}_e = \frac{Lv_0}{\nu} = \frac{\rho_0 v_0}{\frac{\eta}{L}} = \frac{\rho v_0^2}{\frac{\eta v_0}{L}}. \tag{6.77}$$

Or  $\rho v_0^2 = (\rho v_0)v_0$  a les dimensions et l'interprétation d'un flux d'impulsion convectif. D'autre part,  $\eta v_0/L = (\eta/L)v_0$  a les dimensions et l'interprétation d'un flux d'impulsion diffusif car dépendant de la viscosité (donc un processus dissipatif). Ainsi le nombre de Reynolds s'interprète comme le rapport du flux convectif  $J_c$  sur le flux diffusif  $J_d$  :  $\mathcal{R}_e = J_c/J_d$ . On peut également interpréter  $\mathcal{R}_e$  comme un rapport de temps caractéristiques. Le temps caractéristique des processus convectifs est  $t_c \doteq L/v_0$ , tandis que celui des processus diffusifs est  $t_d \doteq L^2/\nu$ . Ainsi  $\mathcal{R}_e = t_d/t_c$ . Nous pouvons ainsi dégager une interprétation des écoulements sur la base du nombre de Reynolds :

- *Écoulement à petit  $\mathcal{R}_e$*  : dans ce cas  $\nu \gg Lv_0$ , ou bien  $t_c \gg t_d$  et  $J_c \ll J_d$ . Le flux diffusif est dominant, donc le temps caractéristique des processus diffusifs beaucoup plus petit que celui des processus convectifs. Les forces visqueuses sont par conséquent dominantes. De tels écoulements s'observent pour de faibles vitesses et/ou de petites tailles, et sont stables. Le terme en laplacien de la vitesse dans l'Eq. (6.76), contribution typique des processus diffusifs, n'est pas négligeable à cause du préfacteur  $1/\mathcal{R}_e$ .
  - *Écoulement à grand  $\mathcal{R}_e$*  : dans ce cas  $Lv_0 \gg \nu$ , ou bien  $t_d \gg t_c$  et  $J_d \ll J_c$ . Le transport convectif est dominant et le temps caractéristique des processus diffusifs beaucoup plus grand. Les écoulements sont alors moins stables, les solutions de l'Eq. (6.76) peuvent ne plus être uniques, et il y a apparition de turbulence [28, 29].
- Les Figs. 6.5, 6.6, et 6.7 représentent l'écoulement autour d'un obstacle circulaire pour des nombre de Reynolds de 26, 200, et 2'000 respectivement.

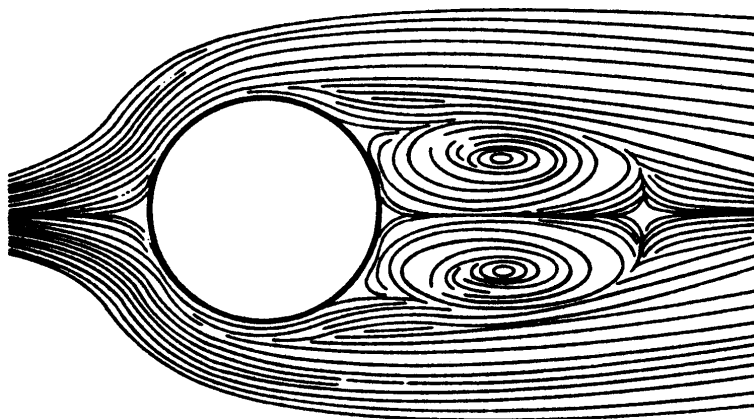


FIG. 6.5 – Écoulement autour d'un obstacle pour  $\mathcal{R}_e = 26$ .

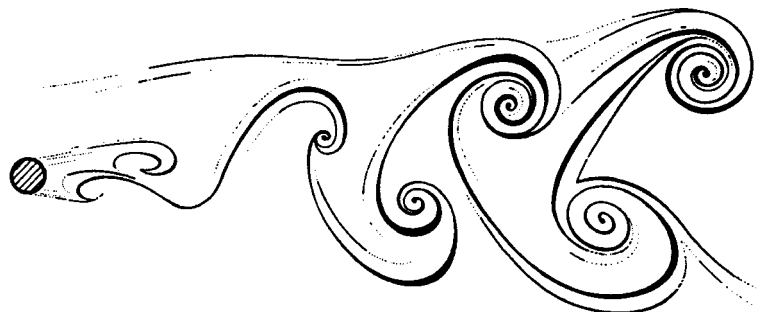
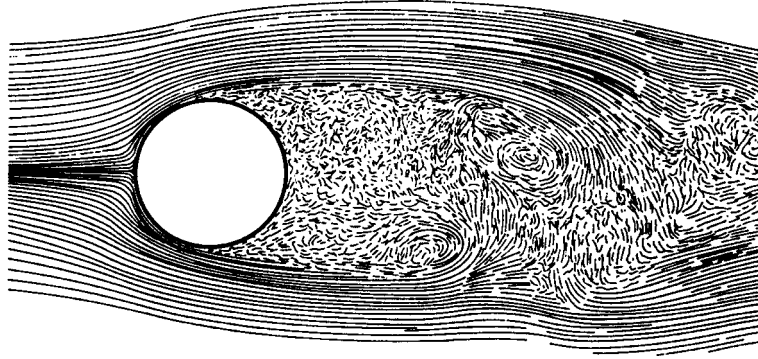


FIG. 6.6 – Écoulement autour d'un obstacle pour  $\mathcal{R}_e = 200$ .

FIG. 6.7 – Ecoulement autour d'un obstacle pour  $\mathcal{R}_e = 2'000$ .

## 6.4 Les tourbillons

### 6.4.1 Définitions

**Définition 6.4** Soit  $\gamma$  un contour continu fermé, alors on définit la *circulation* du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  le long de  $\gamma$  par

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.78)$$

**Définition 6.5** On définit le *vecteur tourbillon*  $\boldsymbol{\omega}$  par

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}. \quad (6.79)$$

Comme nous l'avons évoqué dans la Sect. 5.7.1, le vecteur tourbillon est en mécanique associé au mouvement de rotation, et la vitesse d'un point de position  $\mathbf{x}$  s'obtient par  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ . Quelle est l'interprétation de la circulation ? Utilisant le théorème de Stokes :

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{v} = \int_S \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \stackrel{(6.79)}{=} 2 \int_S \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (6.80)$$

où  $S$  est la surface de bord  $\gamma$ . Une circulation non nulle décrit donc la formation de tourbillons.

**Remarque:** un fluide peut être localement irrotationnel, mais à circulation non nulle. En effet, le théorème de Stokes est mis en défaut si le domaine  $S$  dans lequel le champ de vitesse est régulier n'est pas simplement connexe. En particulier, un domaine qui admet des "trous" n'est pas simplement connexe. Par exemple, un cylindre de rayon  $R$  tournant à vitesse angulaire constante  $\omega$  et entraînant le fluide de telle sorte que pour  $r > R$  on ait en coordonnées polaires  $\mathbf{v}(r) = C/r\hat{\mathbf{e}}_{\theta}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  (cf. Fig. 6.8).

Dans ce cas on a bien  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$  partout dans le fluide. Par contre la circulation vaut  $\Gamma = 2\pi\omega R^2$ . Le fait que  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$  dans le fluide indique que les particules décrivent une trajectoire de *translation uniforme* autour du cylindre, mais ne sont pas en rotation sur elles-même autour du cylindre.  $\diamond$

Introduisons encore les définitions suivantes que l'on retrouve souvent dans la littérature.

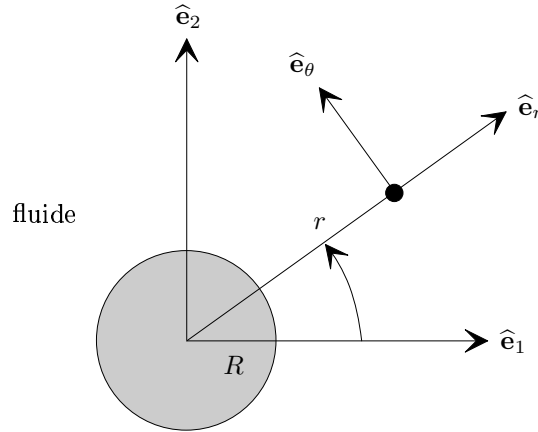


FIG. 6.8 – Cylindre en rotation entraînant le fluide.

**Définition 6.6** On appelle **ligne tourbillon** une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur tourbillon. On appelle **tube tourbillon** une famille de lignes tourbillon passant par un contour continu fermé.

La Fig. 6.9 propose une représentation géométrique des lignes et tubes tourbillon.

### 6.4.2 Le théorème de Kelvin

**Théorème 6.1 (Kelvin)** Soit un fluide parfait incompressible sans forces de volume, soit un contour fermé  $\gamma$  qui se déplace avec le fluide, alors la circulation le long de  $\gamma$  reste constante au cours du temps.

**Preuve:** Le théorème de Kelvin affirme que

$$\frac{d\Gamma}{dt} \stackrel{(6.78)}{=} \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \gamma. \quad (6.81)$$

La courbe  $\gamma$  se déformant avec le fluide, elle dépend du temps. Pour faire porter l'opérateur de dérivation dans l'intégrale sans dériver explicitement le contour  $\gamma$ , il faut considérer l'élément curviligne  $ds$  comme dépendant du temps et se déformant avec le fluide. La dérivation porte donc aussi bien sur la vitesse  $\mathbf{v}$  que sur le contour  $ds$  :

$$\frac{d\Gamma}{dt} \stackrel{(6.78)}{=} \oint_{\gamma} \frac{d}{dt} (\mathbf{ds} \cdot \mathbf{v}) = \oint_{\gamma} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{ds} \right) \cdot \mathbf{v} + \oint_{\gamma} \mathbf{ds} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (6.82)$$

Comme

$$d\mathbf{s} = (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{r} = d\mathbf{r} \quad (6.83)$$

est une longueur infinitésimale de la courbe  $\gamma$  (cf. Fig. 6.10), alors

$$\left( \frac{d}{dt} d\mathbf{s} \right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot d \frac{d\mathbf{s}}{dt} \stackrel{(6.83)}{=} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right). \quad (6.84)$$

Par conséquent

$$\oint_{\gamma} \left( \frac{d}{dt} d\mathbf{s} \right) \cdot \mathbf{v} = \oint_{\gamma} d \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) = 0, \quad (6.85)$$

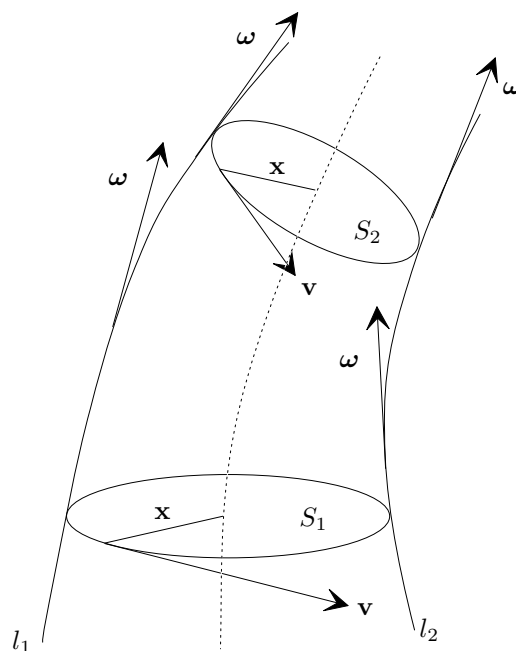


FIG. 6.9 – Lignes et tube tourbillon.

Lignes tourbillon  $l_1$  et  $l_2$ , délimitant ainsi des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . L'ensemble des bords de toutes ces surfaces, ou bien l'ensemble des lignes tourbillon, constitue le tube tourbillon.

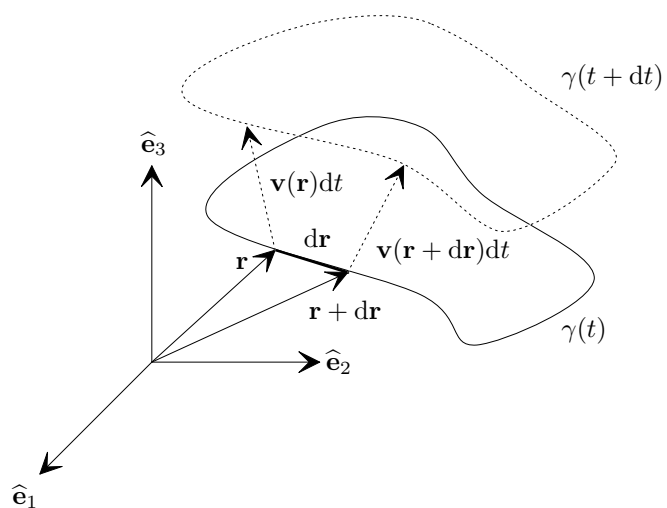


FIG. 6.10 – Contour continu fermé.



car cette dernière relation est l'intégrale d'une différentielle totale sur un contour fermé. Insérant l'Eq. (6.85) dans (6.82) il vient

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{\gamma} ds \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (6.86)$$

Le fluide étant parfait sans forces de volume  $\mathbf{f} = 0$ , sa dynamique est décrite par l'équation de Euler (6.52)

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{= \frac{d\mathbf{v}}{dt}} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \underbrace{\mathbf{f}}_{=0}, \quad (6.87)$$

que l'on insère dans l'Eq. (6.86) en tenant compte de l'hypothèse d'incompressibilité pour obtenir

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{\rho} \oint_{\gamma} ds \cdot \mathbf{grad} p. \quad (6.88)$$

Utilisant le théorème de Stokes, et notant  $d\boldsymbol{\sigma}$  la normale à la surface  $S$ , l'Eq. (6.88) devient

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{\rho} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{grad} p, \quad (6.89)$$

qui utilisant l'identité opératorielle  $\mathbf{rot} \mathbf{grad} p = 0$  pour toute fonction  $p$  de classe  $\mathcal{C}^2(S)$  fournit le résultat cherché

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (6.90)$$

Ainsi la circulation le long de  $\gamma$  est constante, ce qui achève la preuve. ■

Quelle est l'interprétation du théorème de Kelvin ? Soit un disque de rayon  $R$  contenant une masse de fluide  $m$  entraînée à vitesse de rotation  $\omega$  constante, alors la circulation  $\Gamma$  le long de ce cercle est

$$\Gamma \stackrel{(6.80)}{=} 2\pi R^2 \omega = \underbrace{\left(\frac{1}{2} m R^2\right)}_{=I} \omega \underbrace{\frac{4\pi}{m}}_{=C^{-1}}, \quad (6.91)$$

où  $I$  est le moment d'inertie d'un disque de rayon  $R$  et de masse  $m$ ,  $C$  étant une constante. Le théorème de Kelvin affirme donc que  $C\Gamma = I\omega \doteq L$  est conservé par l'écoulement d'un fluide parfait. Il s'agit donc de l'expression de la conservation du moment cinétique  $L$  pour un fluide parfait. Comme toute courbe fermée de circulation nulle restera de circulation nulle au cours de l'évolution, alors on en conclut que  $\omega$  sera constant partout dans l'espace. En l'absence de viscosité, le théorème de Kelvin enseigne donc que ce sont toujours les mêmes particules qui constituent le tourbillon. La rotation ne se transmet donc pas aux autres particules et se propage sans amortissement. Par contre, en présence de viscosité le vecteur tourbillon n'est plus transporté sans déformation, mais il diffuse dans le fluide environnant selon une équation dite *équation du tourbillon*. Les tourbillons se rencontrent dans le sillage des solides en mouvement. Lorsqu'ils sont détachés des parois, on parle de *tourbillons libres*. Par exemple, un cyclone est un tourbillon libre. On peut mettre en évidence expérimentalement la dynamique du tourbillon dans l'air (faible viscosité) à l'aide d'un *canon à tourbillon*. Une autre manière de créer un tel canon est accessible aux fumeurs : si on arrive à réaliser des anneaux de fumée de cigarette, alors on observe qu'ils sont transportés avec une faible déformation (tourbillons libres), la fumée étant en rotation sur elle-même au sein des anneaux.

Notons enfin que ce dernier théorème porte parfois aussi le nom de *théorème de Thompson*.

## 6.5 Etude de différents écoulements

### 6.5.1 Écoulement de fluides visqueux : l'écoulement de Poiseuille

Il s'agit de l'écoulement dans une conduite horizontale cylindrique de fluides stationnaires visqueux incompressibles sans force de volume. On impose une pression différente en chacune des extrémités de la conduite de longueur  $L$  (cf. Fig. 6.11).

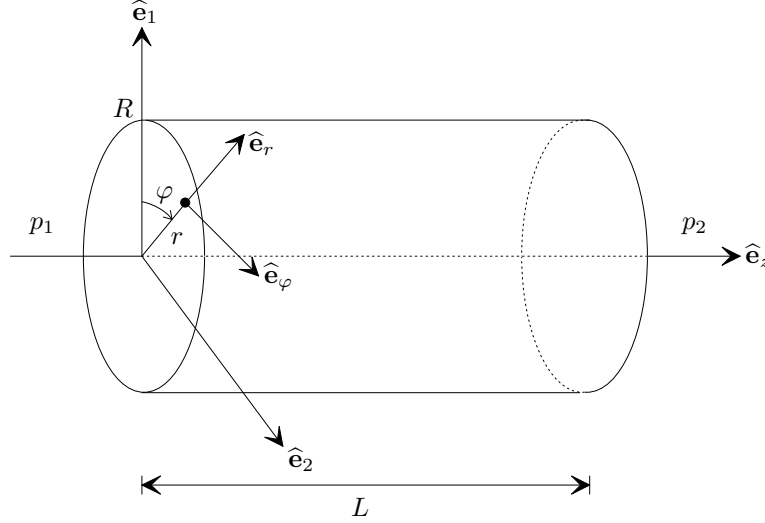


FIG. 6.11 – Écoulement de Poiseuille.

L'équation de Navier-Stokes (6.42) s'écrit

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (6.92)$$

La symétrie du problème étant cylindrique, on choisit les coordonnées  $\{r, \varphi, z\}$ . Les composantes de la vitesse sont notées  $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ . Les symétries du problème suggèrent l'étude d'un écoulement caractérisé par

$$v_r = v_\varphi = 0, \quad (6.93)$$

et donc l'incompressibilité impose

$$v_z = v_z(r). \quad (6.94)$$

Pour écrire l'équation de Navier-Stokes (6.92), on exprime les opérateurs différentiels dans les coordonnées cylindriques à l'aide des relations présentées dans l'annexe A.13. Y insérant les relations (6.93) et (6.94) on obtient

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (6.95)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad (6.96)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \nu \rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \quad (6.97)$$

Le fluide étant visqueux, il suit les parois du cylindre donc on a la condition au bord

$$v_z(r = R) = 0. \quad (6.98)$$

De plus, on pose  $p_1 \geq p_2$ , et  $\Delta p = p_1 - p_2 \geq 0$ . Donc

$$p(z = 0) = p_1, \quad p(z = L) = p_2. \quad (6.99)$$

Des Eqs. (6.95) et (6.96) on déduit que la pression  $p$  ne dépend que de  $z$ . De l'Eq. (6.97), le membre de droite est une constante par rapport à  $z$  donc l'intégration fournit

$$p(z) = c_1 z + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (6.100)$$

Les conditions de bords (6.99) et l'Eq. (6.100) donnent

$$p(z) = -\frac{\Delta p}{L} z + p_1. \quad (6.101)$$

L'intégration de l'Eq. (6.97) ne pose alors pas de difficulté :

$$v_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\rho\nu L} r^2 + a \ln r + b. \quad (6.102)$$

Pour que  $v_z(r = 0)$  soit finie, il faut que  $a = 0$ . La condition de bord (6.98) dans l'Eq. (6.102) fournit

$$b = \frac{\Delta p}{4\rho\nu L} R^2. \quad (6.103)$$

L'insertion de l'Eq. (6.103) dans (6.102) donne la solution de Poiseuille :

$$v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\nu\rho L} (R^2 - r^2), \quad (6.104)$$

dont la représentation est donnée par la Fig. 6.12.

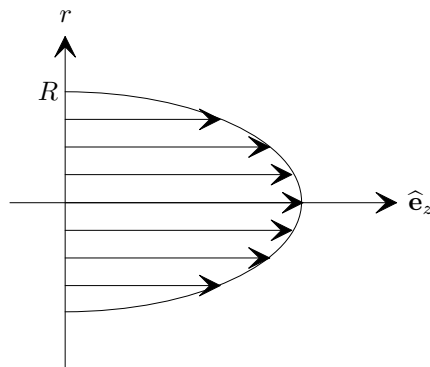


FIG. 6.12 – Solution de Poiseuille.

On vérifie facilement que la solution de Poiseuille satisfait la condition d'incompressibilité  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Le débit volumique traversant une section  $S$  de coordonnée  $z$  constante est

$$D = \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr v_z(r) \stackrel{(6.104)}{=} \frac{\pi R^4}{8\nu\rho L} \Delta p. \quad (6.105)$$

## 6.5.2 Écoulements de fluides parfaits

### 6.5.2.1 Les écoulements potentiels

**Définition 6.7** Soit un fluide parfait incompressible, alors un écoulement est dit **potentiel** dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  si  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  on a  $\mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ .

Notons que dans le cas général visqueux compressible on dit usuellement que l'écoulement est *irrotationnel* [30, 31]. Nous considérons le cas parfait incompressible pour pouvoir appliquer le théorème de Kelvin. En effet, supposons que l'écoulement soit potentiel en un temps donné, alors la circulation pour tout  $\gamma$  est

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{v} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \underbrace{\mathbf{rot} \mathbf{v}}_{=0} = 0. \quad (6.106)$$

Le théorème de Kelvin affirme alors que  $\Gamma = 0$  pour tout temps, ce qui selon l'Eq. (6.106) implique  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$  pour tout temps. Ainsi, un écoulement potentiel reste potentiel. La nullité de la circulation signifie que dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle les lignes de courant doivent contourner ce dernier sans créer de tourbillon (cf. Fig. 6.13).

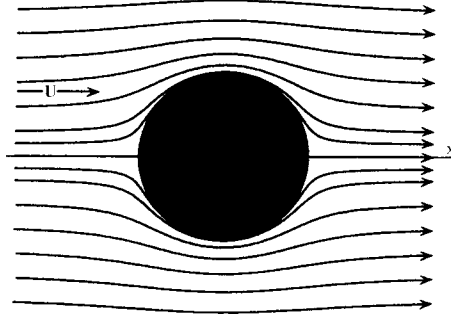


FIG. 6.13 – Écoulement potentiel.

La situation est à comparer avec les écoulements réels à plus grand nombre de Reynolds, où apparaissent des turbulences et tourbillons (cf. Figs. 6.5, 6.6, et 6.7).

**Remarque:** dans le cas de l'écoulement irrotationnel non stationnaire, on peut dériver une équation de type Bernoulli. Dans ce cas, l'écoulement étant potentiel on a par définition  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ . Faisant usage de l'identité vectorielle  $\mathbf{rot} \mathbf{grad} \Phi = 0$ , ceci implique qu'il existe une fonction scalaire  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  telle que  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}, t)$ . Il suffit donc de reprendre la dérivation de la Sect. 6.2.5.3 en ajoutant le terme  $\partial \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}, t) / \partial t$  au membre de gauche de l'Eq. (6.53). On obtient ainsi

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \phi = \text{cte}(t). \quad (6.107)$$

Rappelons que dans le cas de l'équation de Bernoulli la constante garde sa valeur le long de chaque ligne de courant donnée, mais elle varie en général d'une ligne de courant à une autre. Pour un écoulement irrotationnel non stationnaire, la constante de l'Eq. (6.107) dépend ainsi non seulement de la ligne de courant considérée mais aussi du temps.  $\diamond$

### 6.5.2.2 Le fluide parfait autour d'obstacles

Pourquoi l'hypothèse du fluide parfait est-elle mal adaptée à la description de la physique autour d'obstacles ? Si le fluide est parfait, cela signifie que les effets visqueux d'entraînement des particules près des parois sont nuls. Par conséquent, la vitesse de l'écoulement près des parois n'est pas modifiée. Une discontinuité apparaît alors pour toutes les particules localisées sur la surface de l'obstacle, qui elles sont immobiles. Or un tel comportement n'est clairement pas observé. Tout fluide possède une viscosité (abstraction faite de certains fluides à très basse température tel l'hélium-4 et appelés superfluides [30]) aussi petite soit-elle, et cette caractéristique joue un rôle fondamental près des parois et dans le sillage de l'objet. Ainsi il se développe sur la paroi une région dite *couche limite* dans laquelle la vitesse varie continûment pour s'annuler sur la paroi (cf. Fig. 6.14) [31].

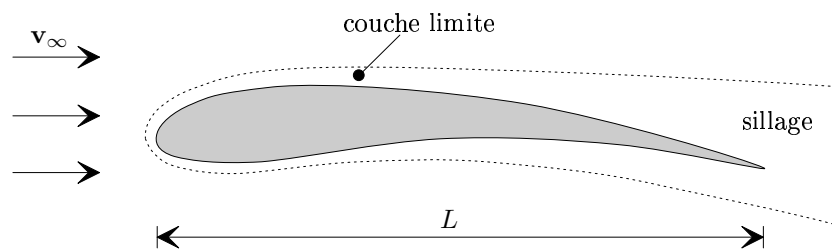


FIG. 6.14 – Couche limite et sillage.

L'épaisseur  $\delta$  de la couche limite est une fonction décroissante de la viscosité cinématique  $\nu$ . Il est clair que faire l'approximation du fluide parfait simplifie grandement les équations de Navier-Stokes. Par conséquent, pour étudier l'écoulement autour d'un obstacle on considère généralement le fluide parfait avec un traitement particulier de l'écoulement dans la couche limite. On divise ainsi le problème initial en deux parties (cf. Fig. 6.15) :

- i) Le *problème extérieur* : l'équation régissant la dynamique de l'écoulement en dehors de la couche limite est celle de Euler.
- ii) Le *problème intérieur* : on réalise une étude visqueuse de la couche limite. Il existe plusieurs théories en fonction du type d'écoulement.

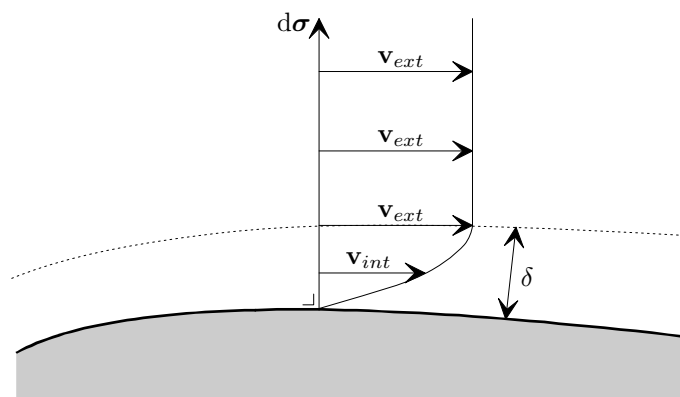


FIG. 6.15 – Problèmes extérieur et intérieur.

D'autres complications peuvent encore se présenter :

- La dynamique de la couche limite peut créer des phénomènes de turbulence, principalement dans le sillage (cf. Fig. 6.16).

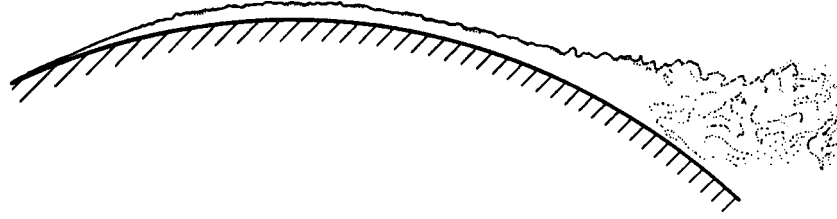


FIG. 6.16 – Turbulence due à la couche limite.

- Il peut y avoir *décollement de la couche limite* (cf. Fig. 6.17). Ainsi l'argument selon lequel la couche limite est de faible épaisseur n'est plus valable.

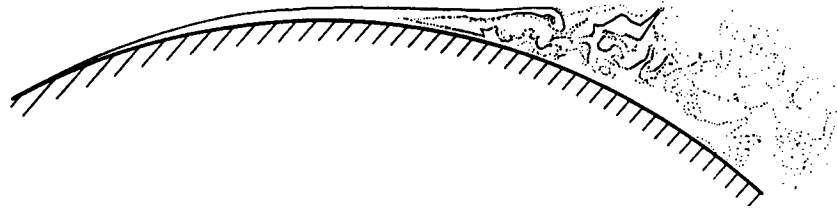


FIG. 6.17 – Décollement de la couche limite.

### 6.5.2.3 Equation du potentiel

Par l'identité vectorielle  $\mathbf{rot grad} \Phi = 0$  pour toute fonction scalaire  $\Phi$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on en déduit que si le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  est potentiel  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ , alors il existe un potentiel scalaire  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  tel que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}, t). \quad (6.108)$$

Si de plus le fluide est incompressible, c'est-à-dire

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = 0, \quad (6.109)$$

alors comme  $\mathbf{div grad} = \Delta$ , l'insertion de l'Eq. (6.108) dans (6.109) fournit l'équation du potentiel du champ de vitesse

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (6.110)$$

Il convient encore d'ajouter les conditions aux bords appropriées. On retrouve ainsi l'*équation de Laplace*, déjà rencontrée en électrodynamique.

Explicitons les conditions aux bords.

- Sur un bord rigide, la composante normale de la vitesse doit être nulle. Soit  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  la normale à la surface au point  $\mathbf{x}$ , alors  $\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} = 0$ .
- Sur un corps solide en mouvement, la composante normale de la vitesse du fluide doit être égale à la vitesse du solide dans cette même direction, notée  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ .

Ainsi, le problème est une équation de Laplace avec conditions de bords de Neumann :

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.111)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega. \quad (6.112)$$

Ce problème est bien connu et diverses techniques de résolution ont été développées.

## 6.5.2.4 Ondes de gravitation

La surface d'un fluide au repos soumis à la pesanteur est plane. Si on perturbe localement le fluide, alors la surface n'est plus plane en ce point. Un mouvement prend naissance. La propagation de cette perturbation est appelée *onde de gravitation*. Nous supposons donc le fluide parfait, irrotationnel, et incompressible. Il faut donc résoudre l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses.

Commençons par la formulation des conditions aux bords. Etudions certains ordres de grandeur permettant d'énoncer deux hypothèses simplificatrices. Soit  $a$  l'amplitude de l'onde de période  $\tau$ . La vitesse caractéristique  $v$  des particules dans l'onde est alors  $v \sim a/\tau$ . Soit  $\lambda$  la longueur d'onde de la perturbation (cf. Fig. 6.18).

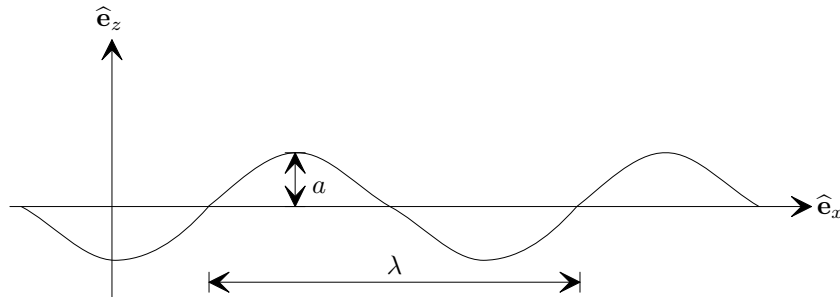


FIG. 6.18 – Ondes de gravitation.

**Hypothèse 6.1** *L'amplitude de l'onde est beaucoup plus petite que la longueur d'onde :*  $a \ll \lambda$ .

Quelle est la conséquence de cette hypothèse raisonnable ? Dans un temps  $\tau$  l'onde se sera propagée d'une distance  $\lambda$ , et

$$\left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{1}{\tau} \left( \frac{a}{\tau} \right), \quad (6.113)$$

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \sim \left[ \left( \frac{a}{\tau} \right) \frac{1}{\lambda} \right] \left( \frac{a}{\tau} \right), \quad (6.114)$$

d'où

$$\left| \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} \right| \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1. \quad (6.115)$$

Cette hypothèse permet donc de négliger le terme  $|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|$  devant  $|\partial \mathbf{v} / \partial t|$  dans l'équation de Euler, qui s'écrit alors

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{f}. \quad (6.116)$$

Notons qu'il s'agit à présent d'une équation linéaire. Or  $\mathbf{f} = -g \hat{\mathbf{e}}_z = -g \mathbf{grad} z$ , et  $\partial \mathbf{v} / \partial t = \partial \mathbf{grad} \Phi / \partial t$ , d'où

$$\mathbf{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mathbf{grad} \frac{p}{\rho} - g \mathbf{grad} z, \quad (6.117)$$

qui s'intègre pour donner

$$p(z) = -\rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{cte.} \quad (6.118)$$

Introduisons la coordonnée  $\xi$  qui décrit l'amplitude de la perturbation verticale selon  $\hat{\mathbf{e}}_z$ . Lorsque la surface est non perturbée, on a  $\xi = 0$ . Par définition de  $\xi$ , pour toute valeur de  $\xi$  on aura toujours en  $z = \xi$  la même pression car cette coordonnée décrit la position de l'interface. Notons  $p_0$  la pression à l'interface  $z = \xi$ . l'Eq. (6.118) devient

$$p_0 = -\rho g \xi - \rho \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=\xi} + \text{cte.} \quad (6.119)$$

Introduisons  $\tilde{\Phi} \doteq \Phi + p_0 t / \rho + \text{cte}$  comme nouveau potentiel des vitesses. En effet,  $\tilde{\Phi}$  et  $\Phi$  définissent la même vitesse car  $\mathbf{grad} \tilde{\Phi} = \mathbf{grad} \Phi$ . Ce nouveau potentiel permet d'éliminer  $p_0$  de l'Eq. (6.119) qui devient en changeant à nouveau la notation  $\tilde{\Phi} \rightarrow \Phi$

$$g \xi + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=\xi} = 0. \quad (6.120)$$

La composante verticale de la vitesse à l'interface est  $v_z = \partial \xi / \partial t$ , mais d'autre part aussi  $v_z = \partial \Phi / \partial z|_{z=\xi}$ . Egalant ces deux relations il vient

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (6.121)$$

Or l'Eq. (6.120) fournit

$$\xi = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=\xi}, \quad (6.122)$$

que l'on insère dans (6.121) pour obtenir

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)_{z=\xi} = 0. \quad (6.123)$$

Par hypothèse, l'amplitude  $a$  des oscillations est petite, et comme  $\xi \leq a$  alors la valeur de la condition aux bords (6.123) au point  $z = \xi$  ne diffère pas sensiblement de celle pour  $z = 0$ . En conclusion, le système d'équations gouvernant la dynamique des ondes de gravitation est :

$$\Delta \Phi = 0, \quad (6.124)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0. \quad (6.125)$$

**Remarques:**

- Il n'y a pas de conditions aux bords pour les directions  $\hat{\mathbf{e}}_x$  et  $\hat{\mathbf{e}}_y$  car le système est supposé infini dans ce plan.
- Pour l'instant nous n'avons pas imposé de condition au fond en  $z = -h$ . Nous allons d'abord étudier le bassin de profondeur infinie  $h = \infty$ , puis celui de profondeur finie  $h < \infty$ .

◇



**Bassin de profondeur infinie :** cherchons une solution de la forme

$$\Phi(x, z, t) = \cos(kx - \omega t)f(z), \quad \omega = 2\pi/\tau, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad (6.126)$$

correspondant à une onde se déplaçant dans la direction  $\hat{e}_x$  de façon uniforme en  $\hat{e}_y$ . L'Eq. (6.126) correspond à une composante de Fourier, et donc cette forme de solution n'est pas une restriction de généralité. Substituant la forme (6.126) dans l'Eq (6.124) il vient

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0, \\ \implies \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) f &= 0. \end{aligned} \quad (6.127)$$

La solution de l'Eq. (6.127) est  $f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$ . Si  $z \rightarrow -\infty$  il faut que la vitesse s'annule, ce qui impose  $B = 0$ . Ainsi

$$\Phi(x, z, t) = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (6.128)$$

Remplaçant la solution (6.128) dans la condition aux bords (6.125) on tire la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} k - \frac{1}{g}\omega^2 &= 0, \\ \implies \omega &= \sqrt{kg}. \end{aligned} \quad (6.129)$$

On définit la *vitesse de phase* par

$$v_k = \frac{\omega}{k} \stackrel{(6.129)}{=} \sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (6.130)$$

$v_k$  dépend de  $k$  de manière non linéaire, et donc il y a dispersion. En effet, la vitesse de propagation de l'onde est alors donnée par sa *vitesse de groupe* :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (6.131)$$

Les composantes de la vitesse du fluide  $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$  sont

$$v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \stackrel{(6.128)}{=} -Ake^{kz} \sin(kx - \omega t), \quad (6.132)$$

$$v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \stackrel{(6.128)}{=} Ake^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (6.133)$$

Comme  $v_x = dx(t)/dt$  et  $v_z = dz(t)/dt$ , l'intégration des Eqs. (6.132) et (6.133) donne la solution  $x(t)$  et  $y(t)$ . Néanmoins, s'agissant d'un système non linéaire de deux équations à deux inconnues, ceci n'est pas possible sans approximation supplémentaire. En effet, les grandeurs  $x$  et  $z$  apparaissant dans le membre de droite des Eqs. (6.132) et (6.133) dépendent du temps. L'idée est plutôt d'intégrer les équations pour une petite déviation autour du point d'équilibre  $\{x_0, z_0\}$ . Soient  $\zeta_x = x(t) - x_0$  et  $\zeta_z = z(t) - z_0$  les écarts à la position d'équilibre. Approximons de plus les membres de droite des Eqs. (6.132) et (6.133) par leurs expressions au point d'équilibre :

$$v_x = \frac{d\zeta_x}{dt} = -Ake^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t), \quad (6.134)$$

$$v_z = \frac{d\zeta_z}{dt} = Ake^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t). \quad (6.135)$$

$$(6.136)$$

L'intégration de  $t_0$  à  $t$  fournit

$$\zeta_x(t) = -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t), \quad (6.137)$$

$$\zeta_z(t) = -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t). \quad (6.138)$$

Les fluctuations décrivent donc un cercle de rayon  $R(z_0) = Ake^{kz_0}/\omega$  dans le plan  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_z\}$  autour du point  $\{x_0, z_0\}$ . Les particules ont en moyenne un déplacement nul, mais par contre l'onde a une vitesse de groupe  $v_g$  dans la direction  $\hat{e}_x$  (cf. Fig. 6.19). Si la hauteur  $z_0$  diminue, alors l'amplitude des fluctuations  $R(z_0)$  diminue.

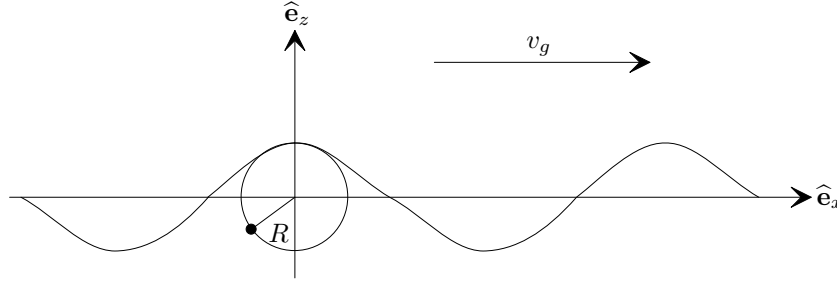


FIG. 6.19 – Solution des ondes de gravitation.

**Bassin de profondeur finie :** étudions encore la solution pour un bassin de profondeur  $h$ . Dans ce cas, il faut satisfaire la condition supplémentaire

$$v_z(z = -h) = 0. \quad (6.139)$$

On peut donc reprendre la solution de l'Eq. (6.127) qui est  $f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$ , en gardant cette fois  $B \neq 0$  car nous avons à présent deux conditions aux bords à satisfaire. Ainsi

$$\Phi(x, z, t) = (Ae^{kz} + Be^{-kz}) \cos(kx - \omega t). \quad (6.140)$$

Insérant l'Eq. (6.140) dans la condition aux bords (6.139) on a

$$Ae^{-kh} - Be^{kh} = 0, \quad (6.141)$$

d'où

$$B = Ae^{-2kh}, \quad (6.142)$$

que l'on insère dans l'Eq. (6.140) pour obtenir

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= [Ae^{kz} + Ae^{-2kh} e^{-kz}] \cos(kx - \omega t) \\ &= 2Ae^{-kh} \frac{1}{2} \underbrace{[e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}]}_{= \text{ch}[k(z+h)]} \cos(kx - \omega t) \\ &= 2Ae^{-kh} \text{ch}[k(z+h)] \cos(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (6.143)$$

Pour déterminer complètement la solution, il est encore nécessaire de connaître la relation de dispersion. Pour cela, considérons les conditions aux bords (6.125) qui avec l'Eq. (6.140) donnent

$$k(A - B) - \frac{\omega^2}{g}(A + B) = 0, \quad (6.144)$$

d'où

$$A = B \frac{gk + \omega^2}{gk - \omega^2}. \quad (6.145)$$

Insérant l'Eq. (6.142) dans (6.145) on obtient après quelques manipulations algébriques

$$\omega^2 = gk \underbrace{\frac{e^{kh} - e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}}}_{= \text{th}(kh)}. \quad (6.146)$$

L'insertion de l'Eq. (6.146) dans (6.143) fournit la solution finale satisfaisant les conditions aux bords (6.125) et (6.139). La vitesse de groupe de l'onde est

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \stackrel{(6.146)}{=} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k \text{th}(kh)}} \left[ \text{th}(kh) + \frac{kh}{\text{ch}^2(kh)} \right]. \quad (6.147)$$

Mentionnons encore deux cas limites :

- i) Grande profondeur  $h \rightarrow \infty$  : dans ce cas la tangente hyperbolique tend vers l'unité à l'infini, et de l'Eq. (6.146) on retrouve le résultat (6.129) :  $\omega = \sqrt{gk}$ .
- ii) Petite profondeur  $h \rightarrow 0$  : un développement de Taylor de l'Eq. (6.147) au premier ordre en  $h$  autour de  $h = 0$  donne  $v_g = \sqrt{gh}$ . La vitesse décroît donc avec la profondeur, ce qui est un des mécanismes expliquant le déferlement des vagues sur la plage : la vague ne va plus assez vite pour que les forces d'inertie et de frottement dues à l'air assurent la stabilité de sa forme.



# Annexe A

## Compléments

### A.1 Formes différentielles et facteurs intégrants

**Définition A.1** Soit  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  une fonction réelle de  $n$  variables réelles  $x_1, \dots, x_n$ . On définit la différentielle totale  $df$  de  $f$  par

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (\text{A.1})$$

Considérons le cas particulier  $n = 2$ , et notons  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ . Supposons que l'on connaisse deux fonctions réelles  $A(x, y)$  et  $B(x, y)$ , sous quelles conditions existe-t-il une fonction  $f(x, y)$  telle que

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = df. \quad (\text{A.2})$$

Pour y répondre, remarquons, en comparant les Eqs. (A.1) et (A.2), que  $f(x, y)$  doit vérifier les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A(x, y), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = B(x, y). \quad (\text{A.4})$$

De plus en supposant que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$  les dérivées secondes commutent :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad (\text{A.5})$$

d'où la condition nécessaire et suffisante

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (\text{A.6})$$

Pour  $n$  variables, la relation (A.2) s'écrit

$$\sum_{i=1}^n A_i(x_1, \dots, x_n) dx_i \stackrel{?}{=} df, \quad (\text{A.7})$$

et la condition nécessaire et suffisante (supposant  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ ) à satisfaire pour que (A.7) soit une différentielle totale est

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.8})$$

Il y a donc  $n(n-1)/2$  conditions à satisfaire. On dit aussi que l'expression

$$\sum_{i=1}^n A_i(x_1, \dots, x_n) dx_i \quad (\text{A.9})$$

définit une *forme différentielle totale* ou "exacte" si les relations (A.8) sont vérifiées. Dans le cas contraire, on dit que l'expression ci-dessus définit une *forme différentielle inexacte*.

Supposons que la forme (A.2) soit exacte, alors on peut voir que la solution est donnée par

$$f(x, y) = \int dx A(x, y) + \int dy B(x, y) - \int dy \int dx \frac{\partial}{\partial y} A(x, y) + \text{cte}|_{x,y}. \quad (\text{A.10})$$

**Exemple:** soit la forme différentielle

$$(3x + y)dx + xdy = 0, \quad (\text{A.11})$$

alors on vérifie facilement qu'il s'agit d'une forme exacte car  $\partial_y A = \partial_x B = 1$  pour  $A = 3x + y$  et  $B = x$ . La relation (A.10) fournit ainsi

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + xy + \text{cte}, \quad (\text{A.12})$$

qui vérifie bien (A.11). ◇

Dans le cas d'une forme différentielle inexacte, nous avons vu que  $\partial_y A \neq \partial_x B$  et l'expression  $A(x, y)dx + B(x, y)dy$  ne définit donc plus une différentielle totale. Cependant, pour des fonctions de deux variables, il existe toujours un ou plusieurs *facteurs intégrants*  $\mu(x, y)$  tels que

$$\frac{\partial(\mu A)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(\mu B)}{\partial x}(x, y). \quad (\text{A.13})$$

Ainsi il existe toujours une fonction  $f(x, y)$  telle que  $df = (\mu A)dx + (\mu B)dy = 0$ . Il n'existe cependant pas de méthode *générale* pour trouver le facteur intégrant  $\mu(x, y)$ . Pour une fonction de  $n$  variables, le nombre de conditions à satisfaire pour avoir une différentielle totale est comme nous l'avons vu égal à  $n(n-1)/2$ . En particulier, si  $n > 2$  il faut satisfaire plus d'une condition et par conséquent il n'existe pas nécessairement de facteur intégrant dans ces cas.

## A.2 Calcul variationnel

Le problème qui consiste à extrémiser une certaine grandeur est courant en physique. En effet, souvent l'état d'équilibre d'un système est déterminé par l'extrémisation d'une quantité paramétrant le problème (par exemple le rapport surface sur volume de gouttes d'eau dans le vide, le temps dans le principe de Fermat, le chemin le plus court et les géodésiques en relativité générale, etc.).

### A.2.1 Equations de Euler pour une variable

Commençons par le cas à une variable. Soit la fonctionnelle

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y(x), y'(x), x], \quad (\text{A.14})$$

où  $f$  est une fonction connue,  $y'(x) = dy(x)/dx$ , et  $x_1, x_2$  sont fixés. On cherche quelle est la fonction  $y(x)$  qui rend  $I$  stationnaire (minimum, maximum, ou point selle). Il s'agit d'un problème difficile qui ne possède pas forcément de solution. Ainsi, on cherche une condition *nécessaire* pour que  $I$  soit stationnaire. La discussion des conditions *suffisantes* peut être plus difficile. Cette difficulté s'explique par l'existence d'extrema locaux qui diffèrent des extrema absolus. Par exemple, regardons le cas simple d'une fonction d'une variable  $y(x)$ .

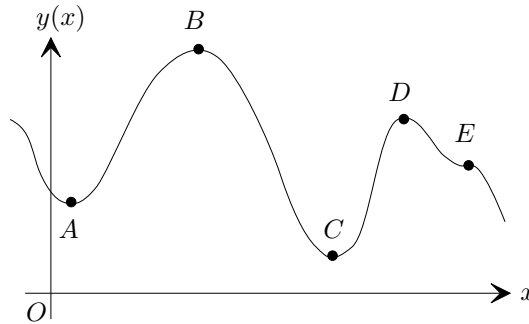


FIG. A.1 – Extremas relatifs et absolus.

Comme le montre la Fig. A.1, la condition d'extremum  $dy/dx = 0$  est satisfaite pour les cinq points A, B, C, D, et E. Or seuls les points B et C sont des extrema absolus, tandis que A et D sont des extrema relatifs et E un point selle. Or le principe de Hamilton fait allusion à un maximum ou minimum absolu. Une discussion de la condition de suffisance pour le calcul variationnel est présentée dans la référence [1].

Supposons que la solution du problème existe, et notons-la  $y(x)$ . Paramétrisons l'ensemble des chemins reliant  $(x_1, y_1)$  à  $(x_2, y_2)$  par

$$y(x, \lambda) = y(x) + \lambda\eta(x), \tag{A.15}$$

où  $\lambda\eta(x)$  est la déviation par rapport à la solution,  $\lambda$  un paramètre continu, et

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \tag{A.16}$$

Alors

$$I(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y(x, \lambda), y'(x, \lambda), x]. \tag{A.17}$$

Pour que  $I(\lambda = 0)$  soit stationnaire, il faut que

$$\left. \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0. \tag{A.18}$$

En utilisant

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} \stackrel{(A.15)}{=} \eta(x), \tag{A.19}$$

$$\frac{dy'}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x} = \frac{d}{dx} \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial \lambda} \stackrel{(A.19)}{=} \frac{d\eta(x)}{dx}, \tag{A.20}$$

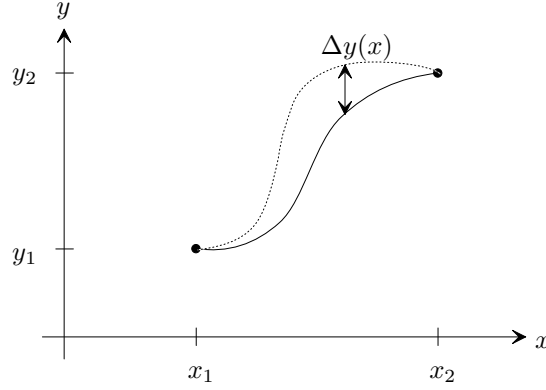


FIG. A.2 – Trajectoire extrémale et sa déviation.

La trajectoire en trait continu schématise la fonction  $y(x)$  qui rend l'action  $I$  extrémale. La trajectoire en traitillés est l'écart  $\Delta y(x) = \lambda \eta(x)$  à la solution cherchée  $y(x)$ .

la condition de stationnarité (A.18) s'écrit explicitement comme

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} \\
 &\stackrel{(A.19)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta(x)}{dx} \right]_{\lambda=0} \\
 &\stackrel{\text{parties}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{\lambda=0} + \underbrace{\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2}}_{(A.16)_0} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \\
 &\stackrel{(A.18)}{=} 0, \quad \forall \eta(x). \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

La relation (A.21) étant vraie pour toute fonction  $\eta(x)$ , on en tire l'équation de Euler

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{A.22}$$

qui donne la condition de stationnarité désirée. Utilisons la notation

$$\delta I = \left. \frac{dI}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \tag{A.23}$$

alors la condition de stationnarité s'écrit aussi  $\delta I = 0$ .

**Exemple:** cherchons la distance la plus courte entre deux points dans un espace euclidien.

Soient deux points  $P_1 = (x_1, y_1)$  et  $P_2 = (x_2, y_2)$  dans le plan (cf. Fig. A.3), alors

$$I = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} ds = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}. \tag{A.24}$$



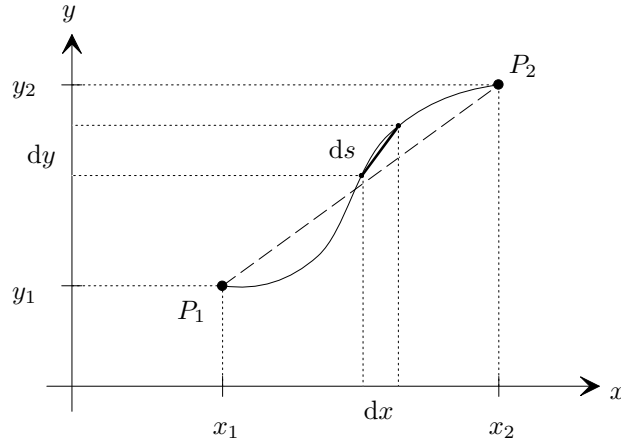


FIG. A.3 – Distance la plus courte entre deux points.

Ainsi  $f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$ , et l'équation de Euler (A.22) fournit donc

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) &= 0 \\ \implies \sqrt{1 + y'^2} &= cy' \\ \implies y' &= a \\ \implies y(x) &= ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Ainsi, le chemin le plus court entre deux points est bien une droite.  $\diamond$

### A.2.2 Equations de Euler pour plusieurs variables

Dans le cas général,  $f$  peut dépendre de plusieurs fonctions indépendantes  $y_1(x), \dots, y_N(x)$ . La fonctionnelle à extrémiser s'écrit alors

$$I[y_1, \dots, y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y_1, \dots, y_N; y'_1, \dots, y'_N; x). \tag{A.26}$$

De façon analogue, on introduit alors  $y_i(x, \lambda) = y_i(x) + \lambda \eta_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Utilisant l'indépendance des  $\eta_i(x)$ , un calcul similaire à celui menant aux équations de Euler (A.21) donne

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \tag{A.27}$$

## A.3 Multiplicateurs de Lagrange

Considérons pour commencer le cas simple d'une fonction de trois variables  $f(x, y, z)$  et d'une seule contrainte. La condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  ait un extremum en  $\mathbf{r}^* = (x^*, y^*, z^*)$  est que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}^*} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}^*} = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}^*} = 0. \tag{A.28}$$

En ce point

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0. \quad (\text{A.29})$$

Il peut néanmoins arriver que les trois variables  $\{x, y, z\}$  ne soient pas indépendantes mais reliées par une condition

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (\text{A.30})$$

On pourrait en principe éliminer une variable et chercher l'extremum de la nouvelle fonction de deux variables. Néanmoins, cela suppose qu'il soit possible d'isoler une variable en utilisant (A.30). Une méthode alternative est celle des *multiplieurs de Lagrange*.

De l'Eq. (A.30) on a

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0. \quad (\text{A.31})$$

Des Eqs. (A.29) et (A.31) on a en particulier

$$df + \lambda d\varphi = 0 \quad (\text{A.32})$$

au point d'extremum, où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est le *multiplieur de Lagrange*. En développant l'Eq. (A.32) on obtient

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (\text{A.33})$$

Comme les trois variables sont reliées par une contrainte, on ne peut pas faire varier de façon indépendante  $dx$ ,  $dy$ , et  $dz$  pour exiger que chaque terme entre parenthèses dans l'Eq. (A.33) s'annule. Néanmoins, sous la condition  $\partial \varphi / \partial z \neq 0$  on peut choisir  $\lambda$  de sorte à ce que

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.34})$$

fournissant ainsi

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}. \quad (\text{A.35})$$

L'Eq. (A.33) se réduit ainsi à

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy = 0. \quad (\text{A.36})$$

On peut à présent faire varier de façon indépendante  $dx$  et  $dy$ , donc chaque parenthèse dans (A.36) doit être nulle. En résumé, nous obtenons ainsi

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \quad (\text{A.37a})$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0, \quad (\text{A.37b})$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (\text{A.37c})$$

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (\text{A.37d})$$

Les Eqs. (A.37) définissent un système de 4 équations pour les 4 inconnues  $\{x, y, z, \lambda\}$ . La généralisation à  $N$  variables et  $C$  contraintes est la suivante.

**Théorème A.1** Soit  $f(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}$  une fonction des  $N$  variables  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , soit  $C$  contraintes  $\varphi_\mu(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}$ ,  $\mu = 1, \dots, C$ , de classe  $C^1$  au voisinage de  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ , soit  $\varphi_\mu(\mathbf{a}) = 0 \forall \mu$ . Supposons de plus que

$$\det \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\}_{\substack{i=1, \dots, C \\ j \in E}} \neq 0, \quad \forall E, \quad (\text{A.38})$$

où  $E = \{e_1, \dots, e_C\}$  est un ensemble de cardinalité  $C$ ,  $e_i \in \{1, \dots, N\}$  pour  $i = 1, \dots, C$ . Alors pour que la restriction de  $f$  aux contraintes  $\varphi_\mu$  atteigne un extréma local au point  $\mathbf{a}$  il faut qu'il existe  $C$  nombres  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_C) \in \mathbb{R}^C$  tels que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} + \sum_{j=1}^C \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.39a})$$

$$\varphi_\mu(\mathbf{a}) = 0, \quad \mu = 1, \dots, C. \quad (\text{A.39b})$$

Le système (A.39) définit  $N + C$  équations pour les  $N + C$  inconnues  $\{\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}\}$ .

**Définition A.2** Les nombres réels  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_C) \in \mathbb{R}^C$  satisfaisant au théorème A.1 sont appelés **multipliateurs de Lagrange**.

**Exemple:** l'énergie  $E_0$  de l'état fondamental d'une particule de masse  $m$  dans une boîte parallélépipédique de côtés  $a$ ,  $b$ , et  $c$  est

$$E_0 = A \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right), \quad A = \frac{h^2}{8m}, \quad (\text{A.40})$$

où  $h$  est la constante de Planck. Quel est la forme de la boîte de volume  $V(a, b, c) = abc \doteq k$  fixé qui minimise  $E_0$  ?

On a :

$$f(a, b, c) = A \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right), \quad (\text{A.41})$$

$$\varphi(a, b, c) = abc - k = 0. \quad (\text{A.42})$$

On vérifie que les conditions du théorème (A.1) sont satisfaites, donc

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial a} = -\frac{2A}{a^3} + \lambda bc = 0, \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial b} = -\frac{2A}{b^3} + \lambda ac = 0, \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial c} = -\frac{2A}{c^3} + \lambda ab = 0. \quad (\text{A.45})$$

On en tire

$$\lambda abc = \frac{2A}{a^2} = \frac{2A}{b^2} = \frac{2A}{c^2}, \quad (\text{A.46})$$

dont la solution est  $a = b = c$  (boîte cubique) et  $\lambda = 2Aa^{-5}$ .  $\diamond$

### A.3.1 Problème variationnel sous contraintes

Considérons le problème variationnel mais cette fois en présence de contraintes.

Soient  $y_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , des fonctions réelles qui peuvent ne pas être indépendantes, soit  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{y}' = (\mathbf{y}'_1, \dots, \mathbf{y}'_N) \in \mathbb{R}^N$ , soit

$$I_0[\mathbf{y}] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x), \quad (\text{A.47})$$

alors on cherche l'extremum de  $I_0$  sous les contraintes autonomes (sans dépendance explicite dans le temps)

$$\varphi_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \quad \mu = 1, \dots, C. \quad (\text{A.48})$$

Comme  $\varphi_\mu = 0$  on a aussi

$$\sum_{\mu=1}^C \lambda_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \varphi_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \sum_{\mu=1}^C \int_{x_1}^{x_2} dx \Lambda_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x) \varphi_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0 \quad (\text{A.49})$$

pour les  $C$  fonctions quelconques  $\lambda_\mu$ , définissant ainsi implicitement  $\Lambda_\mu$  par

$$\lambda_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \int_{x_1}^{x_2} dx \Lambda_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x). \quad (\text{A.50})$$

Insérant (A.49) dans (A.47) on a

$$I[\mathbf{y}] = I_0[\mathbf{y}] + \sum_{\mu=1}^C \lambda_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \varphi_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \quad (\text{A.51})$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ f(\mathbf{y}, \mathbf{y}') + \sum_{\mu=1}^C \Lambda_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x) \varphi_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \right], \quad (\text{A.52})$$

et on cherche donc à résoudre

$$\delta I = 0. \quad (\text{A.53})$$

On constate des Eqs. (A.39) et (A.51) que la recherche de l'extremum (A.53) est équivalente à trouver l'extremum de  $I_0$  sous les contraintes  $\varphi_\mu = 0$ , ce qui exactement ce que nous désirons. On peut alors répéter l'argument de stationnarité sur l'action définie à présent par l'Eq. (A.52). Ainsi, pour les  $N - C$  variables  $y_i$  indépendantes on paramétrise le chemin par  $y_i(x) + \varepsilon \eta_i(x)$ , où  $\eta_i(x)$  sont les écarts à la solution, indépendants. Pour les  $C$  variables restantes  $y_i$ , les multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda_i$  peuvent être choisis de manière à ce que les équations de Euler soient satisfaites (démarche similaire à celle des Eqs. (A.34) et suivantes [32]). Le résultat est donné par le lemme ci-dessous.

**Lemme A.1** *Soit*

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x) = f(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x) + \sum_{\mu=1}^C \Lambda_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x) \varphi_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}'), \quad (\text{A.54})$$

alors les  $y_i(x)$  tels que l'action (A.47) soit extrémale sous les  $C$  contraintes  $\varphi_\mu = 0$  sont donnés en résolvant les  $N+C$  équations pour les  $N+C$  variables  $\{y_1, \dots, y_N, \Lambda_1, \dots, \Lambda_C\}$  :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'_i} - \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.55a})$$

$$\varphi_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \quad \mu = 1, \dots, C. \quad (\text{A.55b})$$

## A.4 Fonction homogène de degré $p$

**Définition A.3** Soit  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , alors une fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  est dite homogène de degré  $p \in \mathbb{Z}$  si

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.56})$$

**Lemme A.2 (Lemme de Euler)** Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , soit  $f(\mathbf{x})$  une fonction homogène de degré  $p$ , alors

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = p f(\mathbf{x}). \quad (\text{A.57})$$

**Preuve:** soit  $\mathbf{y} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda}(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_i}}_{=\frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_i} = x_i} \underbrace{\frac{dy_i}{d\lambda}}_{=x_i} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}_{=0} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y}) \\ \implies \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y}) &= \lambda \frac{d}{d\lambda} f(\mathbf{y}) \stackrel{(\text{A.56})}{=} \lambda \frac{d}{d\lambda} \lambda^p f(\mathbf{x}) = p \lambda^p f(\mathbf{x}) \stackrel{(\text{A.56})}{=} p f(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Ceci étant vrai  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , en choisissant  $\lambda = 1$  on a  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , ce qui achève la preuve. ■

## A.5 Transformation de Legendre

### A.5.1 Cas particulier d'une variable

Soit une fonction réelle  $y(x)$  d'une variable réelle  $x$ , soit  $p(x) = dy(x)/dx$  la pente au point  $x$ . Pour décrire l'équation  $y(x)$  on désire utiliser la variable  $p$  plutôt que  $x$ . La transformation permettant de considérer  $p$  comme nouvelle variable indépendante pour décrire  $y(x)$  sans perte d'information est appelée *transformation de Legendre*.

L'approche pour construire cette transformation est de considérer la courbe  $y(x)$  comme l'enveloppe de ses tangentes. Ainsi tout point de la courbe  $y(x)$  peut soit être décrit par les couples  $\{x, y\}$ , ou par la pente  $p$  de sa tangente et l'intersection  $\psi(p)$  de la tangente avec l'axe  $y = 0$  (cf. Fig. A.4).

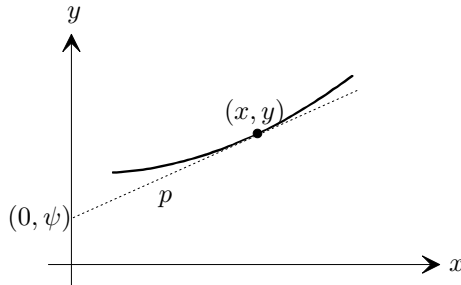


FIG. A.4 – Transformation de Legendre en dimension une.

Pour que l'information soit conservée par la transformation il est nécessaire de définir une application bijective. La courbe  $y(x)$  doit donc être strictement concave ou convexe dans le domaine de définition de la transformation. Ainsi la description de la courbe à l'aide de  $y(x)$  est équivalente à celle utilisant la famille de tangentes  $\psi(p)$ .

Comment construire  $\psi(p)$  connaissant  $y(x)$ ? On voit à l'aide de la Fig. A.4 que

$$p = \frac{y - \psi}{x}, \quad (\text{A.59})$$

d'où

$$\psi = y - px. \quad (\text{A.60})$$

$\psi(p)$  est la *transformée de Legendre* de  $y(x)$ . Dans l'Eq. (A.60),  $\psi$  ne dépend plus de  $x$  qui doit être exprimé en fonction de  $p$ . On exprime donc  $x = x(p)$  à l'aide de la définition  $p = dy(x)/dx$  (par le théorème des fonctions implicites, cette relation est inversible si  $y(x)$  est strictement concave ou convexe), puis remplace  $x = x(p)$  dans l'Eq. (A.60) pour obtenir

$$\psi(p) = y(x(p)) - px(p). \quad (\text{A.61})$$

L'existence de la transformée de Legendre est garantie par la condition de convexité<sup>1</sup> (concavité) stricte, assurant ainsi une transformation bijective.

#### Exemples:

1. Soit  $y(x) = ax^2$ ,  $a > 0$ ,  $x > 0$ . On a donc  $p = dy/dx = 2ax$ ,  $x(p) = p/2a$ , et

$$\psi(p) = y(x(p)) - px(p) = a \left( \frac{p}{2a} \right)^2 - p \frac{p}{2a} = -\frac{p^2}{4a}. \quad (\text{A.62})$$

2. Cet exemple illustre un cas où les conditions pour l'existence d'une transformée de Legendre ne sont pas satisfaites. Soit  $y(x) = ax + b$ . On a donc  $p = dy/dx = a$ , et

$$\psi(p) = y(x(p)) - px(p) = b. \quad (\text{A.63})$$

La pente de  $y(x)$  est constante et par conséquent  $\psi(p)$  est constante (cf. Fig. A.5).

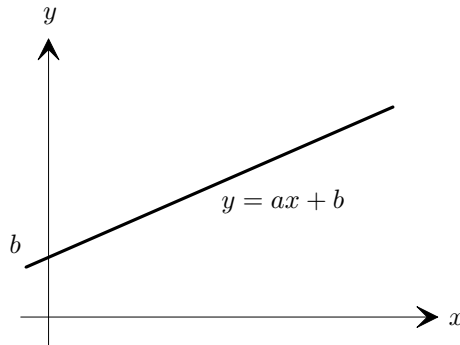


FIG. A.5 – Transformation d'une droite.

Néanmoins, comme  $y''(x) = 0$  cette fonction ne satisfait pas la condition de convexité (concavité) stricte. La transformée de Legendre n'est ainsi pas définie et la relation (A.63) pas valide. En effet, l'Eq. (A.63) ne dépend que d'un seul paramètre, ce

<sup>1</sup>Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , alors une fonction  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  est dit convexe si  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$  pour tous  $x, y \in \Omega$  et  $\alpha \in [0, 1]$ . Si  $f$  est convexe, alors  $-f$  est concave.

qui est insuffisant pour décrire une droite dans le cas général. Il y a donc eu perte d'information, et la transformée de Legendre n'est plus inversible. De plus, comme  $p = dy/dx = a$  est indépendant de  $x$ , il n'a pas été possible d'inverser la relation pour en tirer  $x = x(p)$ . Ainsi l'Eq. (A.63) est obtenue en posant  $x = 0$ , ce qui n'est nullement justifié. Cet exemple permet d'insister sur l'importance de la condition de concavité (convexité) *stricte*.

3. Soit  $y(x) = -\cos x$ ,  $x \in I = [0, \pi/2[$ . On a donc  $y''(x) = \cos x > 0 \forall x \in I$ , et  $p = dy/dx = \sin x$ ,  $p \in [0, 1[$ . Ainsi

$$\psi(p) = y(x(p)) - px(p) = -\cos(\arcsin p) - p \sin p = -\sqrt{1-p^2} - p \sin p. \quad (\text{A.64})$$

◇

**Lemme A.3** *La transformation de Legendre est une involution.*

**Preuve:** par construction la transformée de Legendre est bijective et de plus *involutive*, c'est-à-dire que la transformée de la transformée de Legendre est l'identité. Soit  $\psi(p) = (\mathcal{L}y)(p)$  la transformée de Legendre de  $y(x)$  sur un intervalle connexe  $\Omega \subset \mathbb{R}$  tel que  $y''(x) > 0 \forall x \in \Omega$  (ou bien  $y''(x) < 0$ ). Il faut donc vérifier que  $(\mathcal{L}\psi)(x) = y(x)$ , i.e.  $\mathcal{L}^2 = \mathbb{1}$ . Par définition

$$\psi(p) = y(x(p)) - px(p), \quad p = \frac{dy}{dx}. \quad (\text{A.65})$$

Soit  $z$  la pente de  $\psi(p)$  :

$$z = \frac{d\psi(p)}{dp} \stackrel{(\text{A.65})}{=} \frac{dy(x(p))}{dp} - x(p) - p \frac{dx}{dp} = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\stackrel{(\text{A.65})}{=} p} \frac{dx}{dp} - x(p) - p \frac{dx}{dp} = -x(p), \quad (\text{A.66})$$

alors en appliquant la définition de la transformée de Legendre sur  $\psi(p)$  on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\psi)(z) &\stackrel{\text{déf.}}{=} \psi(p(z)) - zp(z) \\ &\stackrel{(\text{A.65})}{=} y[x(p(z))] - p(z)x(p(z)) - zp(z) \\ &\stackrel{(\text{A.66})}{=} y[x(p(z))] - \underbrace{p(z)x(p(z)) + x(p(z))p(z)}_{=0} \\ &= y(z). \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Comme  $z$  est une variable muette, on peut la renommer en  $x$ , ce qui achève la preuve. ■

### A.5.2 Cas général

**Définition A.4** Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un domaine connexe,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{U} \subset \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ,  $(D^2 f)(\mathbf{x})$  la matrice hessienne de  $f$  d'éléments

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (\text{A.68})$$

soit  $p_i = \partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ . Supposons que pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$  la matrice hessienne  $(D^2 f)(\mathbf{x})$  de  $f$  soit strictement définie positive (ou strictement définie négative), alors on définit la **transformée de Legendre**  $(\mathcal{L}f)(\mathbf{p})$  de  $f(\mathbf{x})$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \Omega &\longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^N \\ \mathbf{x} &\longmapsto (\mathcal{L}f)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{p})) - \sum_{i=1}^N p_i x_i(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

La transformation de Legendre peut aussi être réalisée sur un sous-ensemble de variables  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_M) \in \mathbb{R}^M$ ,  $M \leq N$ . Si la fonction initiale  $f(\mathbf{x})$  est convexe (ou concave) dans les variables  $\mathbf{x}'$ , alors la transformée de Legendre  $(\mathcal{L}f)(\mathbf{p}')$  de la définition A.4 est concave (respectivement convexe) dans les nouvelles variables  $\mathbf{p}'$ .

**Remarque:** on trouve parfois dans la littérature une définition de la transformée de Legendre qui diffère au signe près de celle qui est donnée ici [32]. Néanmoins, l'Eq. (A.69) est la définition qui est communément admise en particulier en *thermodynamique*, où elle joue un rôle important [15]. Par exemple, si  $U = U(S, V, N)$  est l'*énergie interne*,  $S$  l'entropie,  $V$  le volume, et  $N$  le nombre de particules, alors il peut arriver que  $S$  ne soit pas une variable judicieuse pour la description de certains systèmes (l'entropie n'est pas une grandeur à laquelle on a expérimentalement facilement accès). Ainsi, on peut préférer à la variable entropie  $S$  la grandeur conjuguée température  $T$  définie par  $T = \partial U/\partial S$ . La transformée de Legendre de l'énergie interne  $U$  par rapport à l'entropie  $S$  est appelée *énergie libre* et est donc  $F = U - TS$ . L'élimination de  $U$  et  $S$  fournit ainsi l'énergie libre  $F = F(T, V, N)$  en fonction de la nouvelle grandeur  $T$ . Inversement, si on part de  $F = F(T, V, N)$ , grâce à la propriété d'involution de la transformation de Legendre, on peut retrouver l'énergie interne. Ainsi on remplace  $T$  par  $S = \partial F/\partial T$ , et  $U = TS - F$ . L'élimination de  $F$  et  $T$  conduit à  $U = U(S, V, N)$ .  $\diamond$

## A.6 Principe variationnel et formalisme hamiltonien

Les équations de Lagrange découlent d'un principe variationnel. Qu'en est-il pour les équations de Hamilton ?

Nous montrons que le principe de Hamilton étendu à l'espace des phases mène aux équations canoniques. Nous avons vu dans la Sect. 2.2 que le principe de Hamilton s'écrit

$$\delta S[\mathbf{q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0. \quad (\text{A.70})$$

Ce principe s'exprime donc dans l'espace de configuration. La première modification consiste à formuler ce principe dans l'espace des phases, c'est-à-dire en considérant l'action comme fonction des variables indépendantes  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$ . En utilisant la définition (3.1) de l'hamiltonien que l'on insère dans l'Eq. (A.70) il vient :

$$\delta S[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right). \quad (\text{A.71})$$

On dit parfois de la relation (A.71) qu'il s'agit du *principe de Hamilton modifié*. On constate que ce principe a exactement la forme d'un principe variationnel dans un espace de dimension  $2l$ . Par conséquent on peut appliquer le théorème 2.1 avec  $y_1, \dots, y_l =$



$q_1, \dots, q_l$ , et  $y_{l+1}, \dots, y_{2l} = p_1, \dots, p_l$ , et

$$F[y_1(x), \dots, y_{2l}(x); y'_1(x), \dots, y'_{2l}(x); x] = \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (\text{A.72})$$

Les  $2l$  équations de Euler sont ainsi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (\text{A.73a})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (\text{A.73b})$$

ce qui avec l'Eq. (A.72) donne :

$$\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (\text{A.74a})$$

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (\text{A.74b})$$

Les Eqs. (A.74) sont les équations canoniques (3.2). Le fait que  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  jouent un rôle symétrique dans cette dérivation montre à nouveau que dans le formalisme hamiltonien il n'existe pas de variable "privilegiée". Pour plus de détails sur le principe de Hamilton modifié, voir [15].

## A.7 Crochets de Poisson et algèbre de Lie

Soient  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  et  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  deux fonctions sur l'espace des phases, alors les crochets de Poisson de  $F$  et  $G$  (cf. définition 3.3)

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (\text{A.75})$$

peuvent se réécrire sous la forme (cf. sect. 3.4.2.1)

$$\{F, G\}_{\mathbf{Y}} = (\mathbf{grad}_{\mathbf{Y}} F)^t \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{grad}_{\mathbf{Y}} G), \quad (\text{A.76})$$

où  $\mathbf{Y} = (q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l) \in \mathbb{R}^{2l}$  et

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \mathbb{1}_l \\ \dots & \ddots & \vdots \\ -\mathbb{1}_l & \vdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.77})$$

**Lemme A.4** *Les crochets de Poisson sont invariants sous une transformation canonique.*

**Preuve:** Soient  $F(\mathbf{Y}, t)$  et  $G(\mathbf{Y}, t)$  deux fonctions sur l'espace des phases, soit une transformation canonique autonome  $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{Y})$  (pour des raisons de simplicité, nous restreignons ici la discussion au cas qui ne dépend pas explicitement du temps), alors

$$\frac{\partial F(\mathbf{Z}, t)}{\partial Y_i} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial F}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial Y_i}, \quad (\text{A.78})$$

c'est-à-dire vectoriellement

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{Y}} F = (D\phi)^t \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{Z}} F, \quad (\text{A.79})$$

où  $(D\phi)$  est la matrice jacobienne de la transformation, d'éléments  $(D\phi)_{ij} = \partial Z_i / \partial Y_j$ . Ainsi, utilisant  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A}^t$ , les crochets de Poisson (A.76) s'écrivent

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\mathbf{Y}} &= ((D\phi)^t \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{Z}} F)^t \cdot \mathbf{J} \cdot ((D\phi)^t \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{Z}} G) \\ &= (\mathbf{grad}_{\mathbf{Z}} F)^t \cdot (D\phi) \cdot \mathbf{J} \cdot (D\phi)^t \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{Z}} G. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Or la transformation  $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{Y})$  étant par hypothèse canonique, le lemme 3.7 affirme que la matrice jacobienne  $(D\phi)$  est symplectique, c'est-à-dire par définition  $(D\phi) \cdot \mathbf{J} \cdot (D\phi)^t = \mathbf{J}$  (où on a utilisé le fait que la transposée d'une matrice symplectique est encore symplectique). Ainsi l'Eq. (A.80) devient

$$\{F, G\}_{\mathbf{Y}} = (\mathbf{grad}_{\mathbf{Z}} F)^t \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{Z}} G = \{F, G\}_{\mathbf{Z}}, \quad (\text{A.81})$$

ce qui signifie que les crochets de Poisson sont invariants sous une transformation canonique, et par conséquent achève la preuve. ■

**Définition A.5 (Algèbre de Lie)** Soit  $\mathcal{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , alors une *algèbre de Lie* sur  $\mathcal{K}$  est un espace vectoriel  $\mathcal{L}$  de dimension finie sur le corps  $\mathcal{K}$  muni d'une loi de composition notée  $\{\cdot, \cdot\}$  et satisfaisant

$$\{\alpha X + \beta Y, Z\} = \alpha \{X, Z\} + \beta \{Y, Z\}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{K}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{L}, \quad (\text{A.82a})$$

$$\{X, Y\} = -\{Y, X\}, \quad \forall X, Y \in \mathcal{L}, \quad (\text{A.82b})$$

$$\{X, \{Y, Z\}\} + \{Y, \{Z, X\}\} + \{Z, \{X, Y\}\} = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{L}. \quad (\text{A.82c})$$

La relation (A.82a) traduit la linéarité, (A.82b) l'antisymétrie, tandis que l'Eq. (A.82c) est appelée *identité de Jacobi*. Il est alors facile de vérifier que les crochets de Poisson vérifient les relations (A.82).

Si on considère le crochet de Poisson de  $F$  et  $G$  comme une sorte de produit généralisé de ces deux fonctions, alors l'identité de Jacobi exprime la loi d'associativité de ce produit. Par opposition à l'arithmétique usuelle qui est associative, c'est-à-dire  $a(bc) = (ab)c$ , l'identité de Jacobi indique que le "produit" de Poisson n'est pas commutatif. L'ordre des opérateurs est important.

**Définition A.6 (Constantes de structure)** Soit  $\mathcal{L}$  une algèbre de Lie et  $\{e_1, \dots, e_d\}$  une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}$ . Le crochet  $\{\cdot, \cdot\}$  peut alors s'exprimer

$$\{e_i, e_j\} = \sum_{k=1}^d c_{ij}^k e_k. \quad (\text{A.83})$$

Les coefficients  $c_{ij}^k$  s'appellent les *constantes de structure* de l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$ .

**Exemple:** les *matrices de Pauli* (rencontrées dans le traitement du spin en mécanique quantique) forment une algèbre de Lie :

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (\text{A.84})$$

Dans ce cas, les constantes de structure sont

$$c_{ij}^k = 2\sqrt{-1}\varepsilon_{ijk}, \quad (\text{A.85})$$

où  $\varepsilon_{ijk}$  est le *symbole de Levi-Civita* défini par

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont identiques,} \\ 1 & \text{si } (i, j, k) = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}, \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = \{(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\}. \end{cases} \quad (\text{A.86})$$

◇

## A.8 Calcul tensoriel

Soient  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$  les coordonnées dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{x}' = (x'^1, \dots, x'^d) \in \mathbb{R}^d$  les coordonnées dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Supposons que la relation  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x})$  soit un difféomorphisme (application bijective différentiable dont l'inverse est aussi différentiable). Alors la matrice jacobienne correspondant au changement de coordonnées  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$  est donnée par le tenseur  $\Lambda$  d'éléments

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu(x^1, \dots, x^d)}{\partial x^\nu}. \quad (\text{A.87})$$

L'inverse est

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu(x'^1, \dots, x'^d)}{\partial x'^\nu}. \quad (\text{A.88})$$

En adoptant la convention de Einstein selon laquelle il y a sommation sur les indices répétés, on a donc

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu. \quad (\text{A.89})$$

Nous expliquons plus loin la signification de la position des indices. Remarquons déjà que l'effet de la transposition est  $(\Lambda^\mu{}_\nu)^\dagger = \Lambda_\nu{}^\mu$ .

**Définition A.7** Un champ  $\mathbf{b} = \{b_\mu\}_{\mu=1}^d \in \mathbb{R}^d$  est dit **covariant** si lors d'un changement de référentiel il se transforme selon

$$b'_\mu(\mathbf{x}') = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu b_\nu(\mathbf{x}). \quad (\text{A.90})$$

**Définition A.8** Un champ  $\mathbf{b} = \{b^\mu\}_{\mu=1}^d \in \mathbb{R}^d$  est dit **contravariant** si lors d'un changement de référentiel il se transforme selon

$$b'^\mu(\mathbf{x}') = \Lambda^\mu{}_\nu b^\nu(\mathbf{x}). \quad (\text{A.91})$$

**Définition A.9** Un **invariant** (ou scalaire) est une grandeur  $\mathbf{b}$  qui pour tout référentiel vérifie  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}'(\mathbf{x}')$ .

**Lemme A.5** Soit  $a^\mu$  un champ contravariant,  $b_\mu$  un champ covariant, alors  $a^\mu b_\mu$  est un invariant :

$$a^\mu(\mathbf{x})b_\mu(\mathbf{x}) = a'^\mu(\mathbf{x}')b'_\mu(\mathbf{x}'). \quad (\text{A.92})$$

**Preuve:** Des définitions A.7 et A.8 il vient

$$a'^\mu b'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu(\mathbf{x})(\Lambda^{-1})^\gamma{}_\mu b_\gamma(\mathbf{x}) = a^\nu b_\gamma \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu (\Lambda^{-1})^\gamma{}_\mu}_{=(\Lambda^{-1} \cdot \Lambda)^\gamma{}_\nu} = a^\nu b_\gamma \delta^\gamma{}_\nu = a^\nu b_\nu. \quad (\text{A.93})$$

■

**Définition A.10** *Un tenseur  $\mathbf{b}$  contravariant de rang  $p$  et covariant de rang  $q$  est tel que sous un changement de référentiel il se transforme selon*

$$b'^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = C(\Lambda) \Lambda^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_p}_{\gamma_p} (\Lambda^{-1})^{\delta_1}_{\beta_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\delta_q}_{\beta_q} b^{\gamma_1 \dots \gamma_p}_{\delta_1 \dots \delta_q}. \quad (\text{A.94})$$

- Si  $C(\Lambda) = 1 \forall \Lambda$ , alors  $\mathbf{b}$  est un **tenseur**.
- Si  $C(\Lambda) \neq 1 \forall \Lambda$ , alors  $\mathbf{b}$  est un **pseudo-tenseur**.
- Si  $C(\Lambda) = \text{sign}(\Lambda^0_0) \forall \Lambda$ , alors  $\mathbf{b}$  est un **tenseur pseudochrone**.
- Si  $C(\Lambda) = (\det \Lambda)^{-1} \forall \Lambda$ , alors  $\mathbf{b}$  est un **tenseur de type densité**.

**Définition A.11** *Soit un espace vectoriel muni du produit scalaire défini par le tenseur  $g_{\mu\nu}$  deux fois covariant de rang 2. Le produit scalaire entre  $x^\mu$  et  $y^\mu$  s'écrit donc  $x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$ . Le tenseur  $g_{\mu\nu}$  est appelé **tenseur métrique**.*

**Lemme A.6** *Soit un espace de Minkowski muni de la métrique  $g_{\mu\nu}$ , alors :*

1. Si  $b^\nu$  est un champ contravariant, alors  $b_\mu = g_{\mu\nu} b^\nu$  est covariant.
2. L'opérateur de dérivation se transforme de façon covariante :  $\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$ .
3. L'élément de volume de l'espace de Minkowski est invariant sous le groupe de Lorentz.

**Preuve:**

1. Par définition

$$b'_\mu = g_{\mu\nu} b'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho b^\rho. \quad (\text{A.95})$$

D'autre part en utilisant le fait que le tenseur métrique est diagonal avec éléments de valeur absolue unité :

$$g^{\rho\mu} b_\mu = g^{\rho\mu} g_{\mu\nu} b^\nu = g^\rho_\nu b^\nu = b^\rho, \quad (\text{A.96})$$

dernière relation que l'on insère dans l'Eq. (A.95) pour obtenir

$$b'_\mu = \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma}}_{=(\mathbf{g} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{g})^\sigma_\mu} g_\sigma. \quad (\text{A.97})$$

Remarquons aussi que par définition du groupe de Lorentz

$$\begin{aligned} & \Lambda^t \cdot \mathbf{g} \cdot \Lambda = \mathbf{g}, \\ \implies & \underbrace{(\Lambda^t)^{-1} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{g} \cdot \Lambda}_{=1} = (\Lambda^t)^{-1} \cdot \mathbf{g}, \\ \implies & \mathbf{g} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{g}^{-1} = \underbrace{(\Lambda^t)^{-1}}_{=(\Lambda^{-1})^t} \cdot \underbrace{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^{-1}}_{=1}, \\ \implies & \mathbf{g} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{g} = (\Lambda^{-1})^t, \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

que l'on insère dans l'Eq. (A.97) pour obtenir

$$b'_\mu = (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu g_\sigma, \quad (\text{A.99})$$

ce qui est bien la manière dont un champ covariant se transforme.

2. Comme  $x'^\mu = x'^\mu(x)$  on a

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \stackrel{(\text{A.88})}{=} (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu, \quad (\text{A.100})$$

d'où la loi de transformation  $\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$  qui est celle d'un champ covariant.

3. Si  $\Lambda$  est un élément du groupe de Lorentz, alors  $\Lambda^t \cdot \mathbf{g} \cdot \Lambda = \mathbf{g}$  et en prenant le déterminant

$$\det(\Lambda^t \cdot \mathbf{g} \cdot \Lambda) = \underbrace{\det \Lambda^t}_{\det \Lambda} \det \mathbf{g} \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 \det \mathbf{g} = \det \mathbf{g},$$

$$\implies \det \Lambda = \pm 1. \quad (\text{A.101})$$

Comme  $\Lambda$  est la matrice jacobienne de la transformation  $x \mapsto x'$ , alors le jacobien de cette même transformation est égal à l'unité, d'où

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3, \quad (\text{A.102})$$

ce qui achève la preuve. ■

## A.9 Formulation covariante relativiste\*

La formulation lagrangienne présentée dans la Sect. 4.7 fournit évidemment les équations du mouvement relativistes correctes. Néanmoins, cette formulation n'est pas covariante relativiste dans l'espace de Minkowski. En effet, le temps est traité comme un paramètre d'évolution distinct des coordonnées spatiales. Au contraire, une formulation covariante doit considérer l'espace et le temps comme étant des coordonnées équivalentes dans l'espace de Minkowski. La démarche est de remplacer le temps par un paramètre d'évolution covariant, et d'exiger que le principe de Hamilton s'écrive aussi sous forme covariante relativiste. Ainsi, si le paramètre d'intégration dans le principe de moindre action est un invariant de Lorentz, alors il doit en être de même du lagrangien.

### A.9.1 Système à une particule

Le premier choix de paramètre d'évolution invariant serait le temps propre  $\tau$ . Néanmoins, comme le quadrivecteur vitesse satisfait  $u^\mu u_\mu = c^2$  en tout temps, alors les coordonnées spatiales et temporelles sont reliées et non indépendantes ce qui mène a priori à des difficultés (néanmoins nous verrons qu'il est quand même possible de choisir  $\tau$  avec une discussion plus subtile). Nous allons donc prendre comme paramètre d'évolution la grandeur  $\theta$  sans autre spécification qu'il s'agit d'une fonction strictement monotone le long d'une trajectoire de la particule dans l'espace de Minkowski. Notons alors  $x'^\nu = dx^\nu/d\theta$  (à ne pas confondre avec la notation adoptée jusqu'à présent pour les grandeurs dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ ), et  $\dot{x}^\nu = dx^\nu/dt$ . Le *principe de Hamilton covariant* prend donc la forme

$$\delta I = \delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta M(x^\mu, x'^\mu), \quad (\text{A.103})$$

où  $M(x^\mu, x'^\mu)$  est covariant relativiste. Remarquons que cette formulation est non autonome dans le sens où le lagrangien  $L(x^\mu, x'^\mu)$  peut dépendre de façon explicite des quatre coordonnées  $x^\mu$  et par conséquent aussi du paramètre d'évolution  $x^0$ . Les équations de Lagrange correspondantes sont

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\partial M}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial M}{\partial x^\mu} = 0, \quad \mu = 0, 4. \quad (\text{A.104})$$

Le problème consiste à trouver  $M(x^\mu, x'^\mu)$  tel que les Eqs. (A.104) redonnent les équations du mouvement (4.70).

Une façon de trouver la fonction lagrangienne est de partir de l'action exprimée à l'aide du temps et de passer à une intégration sur le paramètre  $\theta$ . Ceci se fait en considérant le temps  $t$  non plus comme un paramètre mais plutôt comme une coordonnée généralisée additionnelle. Comme  $\theta$  est une fonction monotone de  $t$ , alors

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\theta}}_{= x'^\mu} \frac{d\theta}{dt} = x'^\mu c \frac{1}{\frac{d(ct)}{d\theta}} = c \frac{x'^\mu}{x'^0}. \quad (\text{A.105})$$

L'Eq. (A.105) implique aussi

$$dt = \frac{1}{c} x'^0 d\theta. \quad (\text{A.106})$$

Tenant compte de l'Eq. (A.105), l'action dans laquelle le temps joue le rôle de coordonnée généralisée s'écrit

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x^i, t, \dot{x}^i) \stackrel{(\text{A.105})}{=} \stackrel{(\text{A.106})}{=} \frac{1}{c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta x'^0 L\left(x^\mu, c \frac{x'^i}{x'^0}\right). \quad (\text{A.107})$$

Comparant les Eqs. (A.103) et (A.107) on est mené à identifier

$$M(x^\mu, x'^\mu) = \frac{x'^0}{c} L\left(x^\mu, c \frac{x'^i}{x'^0}\right). \quad (\text{A.108})$$

Remarquons que pour n'importe quelle forme explicite du lagrangien covariant  $M$  ainsi défini, il s'agit toujours d'une fonction homogène de degré 1 dans les vitesses généralisées (cf. annexe A.4) :

$$M(x^\mu, \lambda x'^\mu) = \lambda M(x^\mu, x'^\mu), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.109})$$

Par conséquent, l'application du lemme A.2 de l'annexe A.4 implique

$$M(x^\mu, x'^\mu) = \sum_{\mu=0}^3 x'^\mu \frac{\partial M}{\partial x'^\mu}. \quad (\text{A.110})$$

On peut alors montrer que sous la condition (A.110),  $M$  satisfait aux équations

$$\sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{d}{d\theta} \frac{\partial M}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial M}{\partial x'^\mu} \right) x'^\mu = 0. \quad (\text{A.111})$$

Par conséquent, si trois des équations de Lagrange (A.104) sont satisfaites, alors par l'Eq. (A.111) la quatrième le sera automatiquement. En particulier, si les équations de Lagrange covariantes pour les coordonnées spatiales sont satisfaites, alors il en sera de même pour le paramètre d'évolution, ce qui est ce que nous cherchions à établir.

**Exemple:** soit une particule libre dont le lagrangien est donné par l'Eq. (4.76) :

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = -m_0 c \sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{x}}^2} = -m_0 c \left[ (x'^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\dot{x}^i)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{A.112})$$

Appliquant l'Eq (A.110) à (A.112) il vient

$$M = -m_0 c \frac{x'^0}{c} \left[ \frac{c^2}{(x'^0)^2} - \frac{c^2}{(x'^0)^2} (\mathbf{x}')^2 \right]^{1/2} = -m_0 c \sqrt{x'^\mu x'_\mu}. \quad (\text{A.113})$$

Les équations de Lagrange (A.104) utilisant (A.113) donnent

$$\frac{d}{d\theta} \frac{m_0 c x'^{\nu}}{\sqrt{x'^{\mu} x'_{\mu}}} = 0, \quad \nu = 0, \dots, 4. \quad (\text{A.114})$$

De plus comme

$$x'^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{d\theta} = \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} = u^{\nu} \frac{d\tau}{d\theta}, \quad (\text{A.115})$$

alors l'Eq. (A.114) devient

$$\frac{d}{d\theta} \frac{m_0 c x'^{\nu}}{\sqrt{x'^{\mu} x'_{\mu}}} = \frac{d}{d\theta} \frac{m_0 c u^{\nu}}{\sqrt{u^{\mu} u_{\mu}}} = 0. \quad (\text{A.116})$$

Comme  $\theta$  dépend de  $\tau$ , alors

$$\frac{d}{d\theta} = \underbrace{\frac{d\tau}{d\theta}}_{\doteq f(\tau)} \frac{d}{d\tau}, \quad (\text{A.117})$$

que l'on insère dans l'Eq. (A.116).  $\theta$  étant par hypothèse strictement monotone en  $\tau$  on peut alors simplifier la relation obtenue par  $f(\tau)$ , d'où

$$\frac{d}{d\tau} \frac{m_0 c u^{\nu}}{\sqrt{u^{\mu} u_{\mu}}} = 0. \quad (\text{A.118})$$

Or

$$u^{\mu} u_{\mu} = u^{\mu} g_{\mu\nu} u^{\nu} = \gamma^2 (c^2 - |\mathbf{v}|^2) = c^2, \quad (\text{A.119})$$

ce qui dans l'Eq. (A.118) donne

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} (m_0 u^{\nu}) = 0 \\ \implies & \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{=\gamma} \frac{d}{dt} m_0 u^{\nu} = 0 \\ \implies & \frac{d}{dt} m_0 u^{\nu} = 0, \quad \nu = 0, \dots, 3, \end{aligned} \quad (\text{A.120})$$

ce qui sont bien les équations du mouvement (4.70).  $\diamond$

Notons que la paramètre  $\theta$  a été préféré au temps propre  $\tau$  à cause de la contrainte  $u^{\mu} u_{\mu} = c^2$  qui relie les coordonnées spatiales et temporelles. Pour des raisons pratiques, il serait plus utile de pouvoir paramétrer l'évolution par une grandeur concrète telle le temps propre. Ainsi, on peut montrer qu'il est possible de choisir  $\theta = \tau$  et de traiter les coordonnées  $u^{\mu}$  de façon indépendante en n'imposant la condition  $u^{\mu} u_{\mu} = c^2$  qu'à la fin des calculs [15]. La forme covariante des équations de Lagrange s'écrit alors

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial M}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial M}{\partial x^{\mu}} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3. \quad (\text{A.121})$$

$M$  doit être un scalaire, c'est-à-dire un invariant sous le groupe de Lorentz. De plus on peut montrer qu'il suffit que le choix de  $M$  conduise aux bonnes équations du mouvement, sans forcément obéir aux conditions de l'Eq. (A.110) [15]. Par conséquent, les lagrangiens suivants sont acceptables :

– Particule libre :

$$M_0 = \frac{1}{2} m_0 u^{\mu} u_{\mu}. \quad (\text{A.122})$$

- Particule dans un champ électromagnétique :

$$M(x^\mu, u^\mu) = M_0 + qu^\mu \mathcal{A}_\mu(x^\nu), \quad (\text{A.123})$$

où  $q$  est la charge de la particule et  $\mathcal{A}$  le quadrivecteur potentiel.

- Particule soumise à une force extérieure quelconque :

$$M(x^\mu, u^\mu) = M_0 + G_\mu x^\mu, \quad (\text{A.124})$$

où  $G_\mu$  est un quadrivecteur approprié décrivant l'effet de la force extérieure.

### A.9.2 Système de plusieurs particules

Comment établir une formulation lagrangienne covariante pour un système formé de plusieurs particules en interaction ? C'est un problème sensiblement plus difficile qui introduit plusieurs complications, et il n'existe actuellement pas de solution au cas général. En effet, supposons que la force exercée sur une particule dépende de la position (ou de la vitesse) des autres particules. Classiquement la force agit instantanément, indépendamment de la distance entre les différents corps. Ceci n'est évidemment plus vrai en relativité car la vitesse du signal est bornée par celle de la lumière. Ainsi il n'est que rarement possible de trouver une forme covariante de l'interaction, sauf si cette dernière est de contact c'est-à-dire de portée de mesure nulle. Néanmoins, les interactions électromagnétiques peuvent être formulées de façon covariante relativiste. En général, on peut développer un formalisme covariant perturbatif en  $|\mathbf{v}|/c$  si on renonce au principe de Hamilton [15].

## A.10 Dérivation numérique et différences centrées

Cette annexe est uniquement dévolue à la présentation de la formule des différences centrées. Pour une présentation exhaustive et accessible à l'étudiant débutant on renvoie à [33]. Dans la suite, si  $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  alors on note

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (\text{A.125})$$

**Définition A.12** Soit  $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , soit  $h \in \mathbb{R}^+$ , alors on définit l'opérateur de différence première centrée  $\delta_h$  par

$$\delta_h f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right). \quad (\text{A.126})$$

**Théorème A.2** Si  $f(x) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$  et si  $h_0 > 0$ , alors il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\left| f'(x_0) - \frac{\delta_h f(x_0)}{h} \right| \leq Ch^2, \quad \forall h \leq h_0. \quad (\text{A.127})$$

**Preuve:** un développement de Taylor autour de  $x_0$  donne

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{2} + \frac{1}{2!}f''(x_0)\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi)\left(\frac{h}{2}\right)^3, \quad (\text{A.128})$$

où  $\xi \in ]x_0, x_0 + h/2[$ . De même

$$f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = f(x_0) - f'(x_0)\frac{h}{2} + \frac{1}{2!}f''(x_0)\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}f'''(\eta)\left(\frac{h}{2}\right)^3, \quad (\text{A.129})$$



où  $\eta \in ]x_0 - h/2, x_0[$ . En soustrayant l'Eq. (A.129) à (A.128) il vient

$$\underbrace{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}_{\stackrel{(A.126)}{=} \delta_h f(x_0)} = f'(x_0)h + \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{3!} \frac{h^3}{8}, \quad (\text{A.130})$$

donc

$$\frac{\delta_h f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{48} h^2. \quad (\text{A.131})$$

Soit

$$C = \max_{x \in [x_0 - h/2, x_0 + h/2]} \frac{|f'''(x)|}{24}, \quad (\text{A.132})$$

alors l'Eq. (A.131) s'écrit

$$\frac{\delta_h f(x_0)}{h} \leq f'(x_0) + Ch^2, \quad (\text{A.133})$$

ce qui établit l'Eq. (A.127) et par conséquent achève la preuve. ■

**Théorème A.3** Si  $f(x) \in C^{m+2}(\mathbb{R})$  et si  $h_0 > 0$ , alors il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\left| f^{(m)}(x_0) - \frac{\delta_h^m f(x_0)}{h^m} \right| \leq Ch^2, \quad \forall h \leq h_0. \quad (\text{A.134})$$

**Preuve:** la démarche est en tout point similaire à celle du théorème A.3. ■

**Remarque:** le cas particulier  $m = 2$  du théorème A.3 fournit la formule des différences centrées pour la dérivée seconde. En effet, dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \delta_h^2 f(x_0) &= \frac{1}{h^2} \delta_h \left[ f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

Discretisons l'axe réel avec  $x_0 = ih$ ,  $x_0 \pm h = (i \pm 1)h$ , et notons  $f(x_0 \pm h) = f_{i \pm 1}$ ,  $f(x_0) = f_i$ , alors le théorème A.3 fournit

$$f''(x) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.136})$$

◇

## A.11 Théorème de Helmholtz

**Théorème A.4 (Helmholtz)** Soit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in C^1(\mathbb{R}^3)$  tel que

$$|\mathbf{v}(\mathbf{x})| \stackrel{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty}{\lesssim} |\mathbf{x}|^{-1}, \quad (\text{A.137})$$

$$|\partial_{x_i} \mathbf{v}(\mathbf{x})| \stackrel{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty}{\lesssim} |\mathbf{x}|^{-2}, \quad \forall i = 1, \dots, 3, \quad (\text{A.138})$$

alors il existe  $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{v}_2(\mathbf{x})$  tels que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{rot} \mathbf{v}_1 = 0$ ,  $\mathbf{div} \mathbf{v}_2 = 0$ .

**Proposition A.1 (Solution de l'équation de Poisson)** Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$  tel que  $f(\mathbf{x}) \lesssim |\mathbf{x}|^{-2}$  pour  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , alors l'équation de Poisson

$$\Delta u = f \quad (\text{A.139})$$

a comme solution

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}. \quad (\text{A.140})$$

Pour la preuve de la forme de la solution de l'équation de Poisson de la proposition précédente, on renvoie aux cours d'analyse ou d'électrodynamique. Passons ainsi à la preuve du théorème de Helmholtz.

**Preuve:** posons

$$f = \text{div } \mathbf{v}, \quad (\text{A.141})$$

alors par les hypothèses sur  $\mathbf{v}$  on a  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$  et  $f(\mathbf{x}) \lesssim |\mathbf{x}|^{-2}$  pour  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Par conséquent les hypothèses de la proposition A.1 sont satisfaites et il existe une fonction  $u(\mathbf{x})$  définie par l'Eq. (A.140). Soit

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{grad } u, \quad (\text{A.142})$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \quad (\text{A.143})$$

alors comme  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$  l'identité vectorielle  $\mathbf{rot } \mathbf{grad } u = 0 \ \forall \mathbf{x}$  indique que  $\mathbf{v}_1$  est irrotationnel. De plus

$$\text{div } \mathbf{v}_2 \stackrel{(\text{A.143})}{=} \text{div } \mathbf{v} - \text{div } \mathbf{v}_1, \quad (\text{A.144})$$

avec

$$\text{div } \mathbf{v} \stackrel{(\text{A.141})}{=} f, \quad (\text{A.145})$$

$$-\text{div } \mathbf{v}_1 \stackrel{(\text{A.142})}{=} -\text{div } \mathbf{grad } u = -\Delta u \stackrel{(\text{A.140})}{=} -f. \quad (\text{A.146})$$

Les Eqs. (A.145) et (A.146) dans (A.144) donnent

$$\text{div } \mathbf{v}_2 = 0, \quad (\text{A.147})$$

et donc le champ  $\mathbf{v}_2$  est incompressible. Finalement, de l'Eq. (A.143) on déduit que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , ce qui achève la preuve. ■

**Lemme A.7** Soit  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$  une autre décomposition de  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$  telle que  $\mathbf{rot } \mathbf{v}'_1 = \text{div } \mathbf{v}'_2 = 0$ , alors  $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 + C$  et  $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - C$ , où  $C \in \mathbb{R}$  est une constante indépendante de  $\mathbf{x}$ .

**Preuve:** soit  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$  tels que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{rot } \mathbf{v}'_1 = \mathbf{rot } \mathbf{v}_1 = \text{div } \mathbf{v}'_2 = \text{div } \mathbf{v}_2 = 0$ .

i) Soit  $\mathbf{w} = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1$ , alors

$$\text{div } \mathbf{w} = \text{div } \mathbf{v}'_1 - \text{div } \mathbf{v}_1 = \text{div } \underbrace{(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2)}_{=\mathbf{v}} - \text{div } \underbrace{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}_{=\mathbf{v}} = 0. \quad (\text{A.148})$$

De plus  $\mathbf{rot } \mathbf{w} = 0$ , donc il existe un potentiel scalaire  $\Phi$  tel que

$$\mathbf{w} = \mathbf{grad } \Phi + \text{cte}. \quad (\text{A.149})$$

Définissons  $f$  par

$$f \doteq \operatorname{div} \mathbf{w} \stackrel{(A.149)}{=} \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi, \quad (\text{A.150})$$

donc la solution de l'équation de Poisson (A.150) est

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \stackrel{(A.148)}{=} 0, \quad (\text{A.151})$$

d'où

$$\mathbf{w} \stackrel{(A.149)}{=} \operatorname{grad} \Phi + \text{cte} \stackrel{(A.151)}{=} \text{cte}, \quad (\text{A.152})$$

et donc  $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 + \text{cte}$ .

ii) Soit à présent  $\mathbf{w} = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2$ , alors

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{v}'_2 - \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = \underbrace{\operatorname{rot} (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2)}_{=\mathbf{v}} - \underbrace{\operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}_{=\mathbf{v}} = 0. \quad (\text{A.153})$$

De plus  $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ , donc il existe un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \text{cte}. \quad (\text{A.154})$$

Définissons  $\mathbf{f}$  par

$$\mathbf{f} \doteq \operatorname{rot} \mathbf{w} \stackrel{(A.154)}{=} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}, \quad (\text{A.155})$$

où nous avons fait un choix de jauge tel que  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . En effet, on peut toujours trouver un tel  $\mathbf{A}$  car si  $\mathbf{A} \doteq \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda$  alors on a toujours  $\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , et donc on choisit la jauge  $\Lambda$  de sorte à ce que  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  ( $\Lambda$  est alors donné par l'équation de Laplace  $\Delta \Lambda = 0$ ). La solution de l'équation de Poisson (A.155) est :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \stackrel{(A.155)}{=} 0, \quad (\text{A.156})$$

d'où

$$\mathbf{w} \stackrel{(A.154)}{=} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \text{cte} \stackrel{(A.156)}{=} 0, \quad (\text{A.157})$$

et donc  $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 + \text{cte}$ .

iii) Finalement, si  $C \in \mathbb{R}$  est une constante indépendante de  $\mathbf{x}$ , alors on remarque que

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 + C, \quad (\text{A.158})$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - C, \quad (\text{A.159})$$

est une autre décomposition possible. Par les points i) et ii), nous avons montré qu'il s'agit de la seule décomposition permise, ce qui achève la preuve. ■

## A.12 Champs tensoriels, opérateurs différentiels

Définissons les opérateurs différentiels suivants, parfois utilisés en hydrodynamique.

**Définition A.13** Soit  $\mathbf{a}$  un champ vectoriel, alors on définit le tenseur d'ordre 2 appelé le *grand gradient* de  $\mathbf{a}$  par ses éléments

$$(\mathbf{Grad} \mathbf{a})_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}. \quad (\text{A.160})$$

**Définition A.14** Soit  $\mathbf{A}$  un tenseur d'ordre deux, alors on définit le vecteur appelé la *grande divergence* de  $\mathbf{A}$  par ses éléments

$$(\mathbf{Div} \mathbf{A})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{A.161})$$

**Définition A.15** Soient  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  deux champs vectoriels, alors on définit le produit tensoriel de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , noté  $\otimes$ , par le tenseur de rang deux

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j. \quad (\text{A.162})$$

Pour les besoins de ce cours, il ne sera pas nécessaire de fournir une définition plus rigoureuse du produit tensoriel que celle ci-dessus. On renvoie à un ouvrage de mathématique spécialisé pour la définition complète. Remarquons aussi que  $\mathbf{Div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ .

**Lemme A.8** Soit un volume  $V$  de surface  $S$ , soit  $\mathbf{A}$  un tenseur d'ordre deux, alors le théorème de la divergence pour  $\mathbf{A}$  s'énonce :

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \int_V d\mathbf{x} \mathbf{Div} \mathbf{A}. \quad (\text{A.163})$$

**Preuve:** la preuve est une conséquence directe du théorème de la divergence (parfois aussi appelé théorème de Ostrogradski ou de Gauss). En effet, si on a un volume  $V$  de surface  $S$ , alors ce théorème pour un champ vectoriel  $\mathbf{a}$  s'énonce

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} = \int_V d\mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad (\text{A.164})$$

Donc l'équivalent pour  $\mathbf{A}$  est

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \int_S \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 A_{1j} d\sigma_j \\ \sum_{j=1}^3 A_{2j} d\sigma_j \\ \sum_{j=1}^3 A_{3j} d\sigma_j \end{pmatrix}. \quad (\text{A.165})$$

La preuve consiste à appliquer l'Eq. (A.164) pour chaque composante de (A.165). Ainsi en notant  $\mathbf{A}_i = (A_{i1}, A_{i2}, A_{i3})$  le  $i$ -ème vecteur ligne de  $\mathbf{A}$  il vient

$$\int_S \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 A_{1j} d\sigma_j \\ \sum_{j=1}^3 A_{2j} d\sigma_j \\ \sum_{j=1}^3 A_{3j} d\sigma_j \end{pmatrix} \stackrel{(\text{A.164})}{=} \int_V d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{A}_1 \\ \operatorname{div} \mathbf{A}_2 \\ \operatorname{div} \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} = \int_V d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_{2j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_{3j}}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \int_V d\mathbf{x} \mathbf{Div} \mathbf{A}, \quad (\text{A.166})$$

ce qui en utilisant l'Eq. (A.165) achève la preuve.  $\blacksquare$

## A.13 Opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes

Cette section est dévolue à fournir l'expression de différents opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques et sphériques. Dans un second temps, nous donnons l'équation de continuité ainsi que de Navier-Stokes dans ces mêmes coordonnées. Les coordonnées cylindriques sont paramétrisées par  $(r, \varphi, z)$ , et les coordonnées sphériques par  $(r, \theta, \varphi)$  (cf. Fig. A.6).

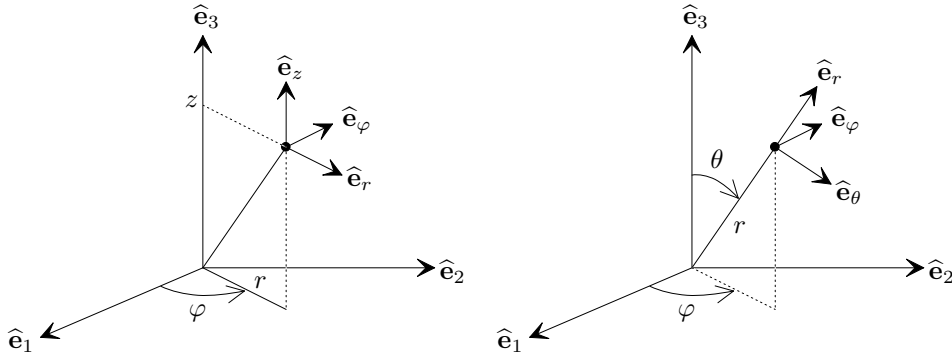


FIG. A.6 – Coordonnées cylindriques et sphériques.

### A.13.1 Démarche générale

Nous montrons quelle est la démarche générale permettant d'établir les opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes. Soient les coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , et les coordonnées curvilignes  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ . Dans ce qui suit, nous supposons un choix de coordonnées curvilignes orthogonales définissant un difféomorphisme. La base orthonormale curviligne de  $\mathbb{R}^3$  est alors

$$\hat{\mathbf{e}}_{u_i} = \frac{1}{\alpha_i(\mathbf{u})} \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\partial u_i}, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (\text{A.167})$$

où  $\alpha_i(\mathbf{u})$  est la normalisation donnée par

$$\alpha_i(\mathbf{u}) = \left| \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \right|. \quad (\text{A.168})$$

Notons  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  (coordonnées cartésiennes).

Pour trouver l'expression des opérateurs différentiels dans la base  $\{\hat{\mathbf{e}}_{u_i}\}_{i=1}^3$ , il suffit de projeter ces derniers sur la base curviligne. Soit  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  tel que sa décomposition dans la base canonique soit

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^3 a_j \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (\text{A.169})$$

Soit

$$\mathcal{P}_{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \quad (\text{A.170})$$

l'opérateur de projection dans la base  $\{\hat{\mathbf{e}}_{u_i}\}_{i=1}^3$ , alors l'expression de  $\mathbf{a}$  dans la base curviligne, notée  $\mathbf{a}_{\mathbf{u}}$ , est :

$$\mathbf{a}_{\mathbf{u}} = \mathcal{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \cdot \sum_{j=1}^3 a_j \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \underbrace{\sum_{j=1}^3 a_j \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_{u_i}}_{= a_{u_i}}. \quad (\text{A.171})$$

Prenons l'exemple du gradient de la fonction scalaire  $f$ . On veut donc projeter  $\mathbf{a} = \nabla f$

dans la base curviligne. L'application de l'Eq. (A.171) donne

$$\begin{aligned}
(\nabla f)_{\mathbf{u}} &= \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \\
&\stackrel{(A.167)}{=} \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \frac{1}{\alpha_i(\mathbf{u})} \underbrace{\sum_{j=1}^3 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\partial u_i}}_{= \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial u_i}} \\
&= \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{u_i} \frac{1}{\alpha_i(\mathbf{u})} \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial u_i}. \tag{A.172}
\end{aligned}$$

Soulignons que la relation (A.172) est valable quel que soit le système de coordonnées curvilignes orthogonales choisi. Prenons par exemple les coordonnées cylindriques, alors

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \tag{A.173}$$

d'où  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = r$ , et  $\alpha_3 = 1$ . Ainsi l'Eq. (A.172) devient

$$(\nabla f)_{\mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z, \tag{A.174}$$

ce qui est bien la même relation que (A.177). Pour plus de détails, voir [34].

## A.13.2 Coordonnées cylindriques

### A.13.2.1 Divergence

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{A.175}$$

### A.13.2.2 Gradient

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = (\nabla f)_r \hat{\mathbf{e}}_r + (\nabla f)_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\nabla f)_z \hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.176}$$

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{A.177}$$

### A.13.2.3 Rotationnel

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = (\nabla \times \mathbf{a})_r \hat{\mathbf{e}}_r + (\nabla \times \mathbf{a})_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\nabla \times \mathbf{a})_z \hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.178}$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.179})$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})_\varphi = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \quad (\text{A.180})$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \quad (\text{A.181})$$

#### A.13.2.4 Laplacien d'une fonction scalaire

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.182})$$

#### A.13.2.5 Laplacien d'un vecteur

$$\text{Div}(\text{Grad } \mathbf{a}) = \nabla^2 \mathbf{a} = (\nabla^2 \mathbf{a})_r \hat{\mathbf{e}}_r + (\nabla^2 \mathbf{a})_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\nabla^2 \mathbf{a})_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.183})$$

$$(\nabla^2 \mathbf{a})_r = \nabla^2 a_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{a_r}{r^2} \quad (\text{A.184})$$

$$(\nabla^2 \mathbf{a})_\varphi = \nabla^2 a_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{a_\varphi}{r^2} \quad (\text{A.185})$$

$$(\nabla^2 \mathbf{a})_z = \nabla^2 a_z \quad (\text{A.186})$$

#### A.13.2.6 Composantes de $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$

$$(\text{Grad } \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_r \hat{\mathbf{e}}_r + ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.187})$$

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_r = a_r \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} \frac{\partial b_r}{\partial \varphi} + a_z \frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{a_\varphi b_\varphi}{r} \quad (\text{A.188})$$

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_\varphi = a_r \frac{\partial b_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} + a_z \frac{\partial b_\varphi}{\partial z} + \frac{a_\varphi b_r}{r} \quad (\text{A.189})$$

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_z = a_r \frac{\partial b_z}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} \frac{\partial b_z}{\partial \varphi} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z} \quad (\text{A.190})$$

#### A.13.2.7 Divergence d'un tenseur

$$\text{Div } \mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T} = (\nabla \cdot \mathbf{T})_r \hat{\mathbf{e}}_r + (\nabla \cdot \mathbf{T})_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\nabla \cdot \mathbf{T})_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.191})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{T}_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{T}_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zr}}{\partial z} - \frac{\mathbf{T}_{\varphi\varphi}}{r} \quad (\text{A.192})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{T}_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{T}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{T}_{z\varphi}}{\partial z} - \frac{\mathbf{T}_{\varphi r}}{r} \quad (\text{A.193})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{T}_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{T}_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zz}}{\partial z} \quad (\text{A.194})$$

### A.13.3 Coordonnées sphériques

#### A.13.3.1 Divergence

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.195})$$

#### A.13.3.2 Gradient

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = (\nabla f)_r \hat{\mathbf{e}}_r + (\nabla f)_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + (\nabla f)_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad (\text{A.196})$$

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (\text{A.197})$$

#### A.13.3.3 Rotationnel

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = (\nabla \times \mathbf{a})_r \hat{\mathbf{e}}_r + (\nabla \times \mathbf{a})_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + (\nabla \times \mathbf{a})_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad (\text{A.198})$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \quad (\text{A.199})$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \quad (\text{A.200})$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \quad (\text{A.201})$$

#### A.13.3.4 Laplacien d'une fonction scalaire

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.202})$$

#### A.13.3.5 Laplacien d'un vecteur

$$\operatorname{Div}(\operatorname{Grad} \mathbf{a}) = \nabla^2 \mathbf{a} = (\nabla^2 \mathbf{a})_r \hat{\mathbf{e}}_r + (\nabla^2 \mathbf{a})_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + (\nabla^2 \mathbf{a})_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad (\text{A.203})$$



$$(\nabla^2 \mathbf{a})_r = \nabla^2 a_r - \frac{2a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} - \frac{2a_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.204})$$

$$(\nabla^2 \mathbf{a})_\theta = \nabla^2 a_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.205})$$

$$(\nabla^2 \mathbf{a})_\varphi = \nabla^2 a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \quad (\text{A.206})$$

### A.13.3.6 Composantes de $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$

$$(\operatorname{Grad} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta + ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (\text{A.207})$$

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_r = a_r \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b_r}{\partial \theta} + \frac{a_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial b_r}{\partial \varphi} - \frac{a_\theta b_\theta + a_\varphi b_\varphi}{r} \quad (\text{A.208})$$

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_\theta = a_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial b_\theta}{\partial \varphi} + \frac{a_\theta b_r}{r} - \frac{a_\varphi b_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \quad (\text{A.209})$$

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})_\varphi = a_r \frac{\partial b_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{a_\varphi b_r}{r} + \frac{a_\varphi b_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \quad (\text{A.210})$$

### A.13.3.7 Divergence d'un tenseur

$$\operatorname{Div} \mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T} = (\nabla \cdot \mathbf{T})_r \hat{\mathbf{e}}_r + (\nabla \cdot \mathbf{T})_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + (\nabla \cdot \mathbf{T})_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (\text{A.211})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{T}_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{T}_{\theta r} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{T}_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\mathbf{T}_{\theta\theta} + \mathbf{T}_{\varphi\varphi}}{r} \quad (\text{A.212})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{T}_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{T}_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{T}_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\mathbf{T}_{\theta r}}{r} - \frac{\mathbf{T}_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} \quad (\text{A.213})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{T}_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{T}_{\theta\varphi} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{T}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\mathbf{T}_{\varphi r}}{r} - \frac{\mathbf{T}_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} \quad (\text{A.214})$$

## A.13.4 Equation de continuité

### A.13.4.1 Coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (\text{A.215})$$

### A.13.4.2 Coordonnées sphériques

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0 \quad (\text{A.216})$$

### A.13.5 Equation de Navier-Stokes

#### A.13.5.1 Coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \\
&+ \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right] + f_r \quad (\text{A.217})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right] \\
&+ \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} (r v_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi \partial z} \right] + f_\varphi \quad (\text{A.218})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \\
&+ \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + f_z \quad (\text{A.219})
\end{aligned}$$

**A.13.5.2 Coordonnées sphériques**

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r v_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \text{ctg } \theta}{r^2} v_\theta \right] \\
&\quad + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] + f_r
\end{aligned} \tag{A.220}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \text{ctg } \theta}{r} \\
&= -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r v_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \\
&\quad + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \left[ \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] + f_\theta
\end{aligned} \tag{A.221}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \text{ctg } \theta}{r} \\
&= -\frac{1}{r \rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r v_\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \\
&\quad + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \left[ \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \right] + f_\varphi
\end{aligned} \tag{A.222}$$



# Bibliographie

- [1] H. Sagan, *Introduction to the calculus of variations*, Mc Graw Hill (1969).
- [2] P. Brunet, *Etudes historiques sur le principe de moindre action*, Hermann Paris (1938).
- [3] *La nature et le principe de moindre action*, Les cahiers de Science et Vie, **68** (avril 2002).
- [4] L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, Ed. Mir Moscou (1960).
- [5] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie des champs*, Ed. Mir Moscou (1960).
- [6] L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique quantique*, Ed. Mir Moscou (1960).
- [7] P. Glansdorff, I. Prigogine, *Structure, stabilité et fluctuations*, Masson Paris (1971).
- [8] C. Gruber, *Mécanique générale*, Presses Polytechniques Universitaires Romandes (1988).
- [9] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall (1989).
- [10] K. Huang, *Statistical Mechanics*, J. Wiley (1987).
- [11] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique Quantique*, Hermann (1973).
- [12] B. Chopard, M. Droz, *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*, Cambridge University Press (1998).
- [13] A.J. Lichtenberg, M.A. Liebermann, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer, Berlin, 1992).
- [14] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer (1997).
- [15] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (1980).
- [16] C. Gignoux, B. Silvestre-Brac, *Mécanique*, EDP Sciences (2002).
- [17] K. F. Sundman, *Mémoire sur le problème à trois corps*, Acta Mathematica **36**, 1050179 (1913).
- [18] A. A. Michelson et E.W. Morley, Am. Jour. of Science **34**, 333 (1887).
- [19] V. Fock, *The theory of space, time and Gravitation*, Pergamon Press (1964).
- [20] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (1999).
- [21] N. D. Mermin, *Space and time in special relativity*, Waveland Press Inc. (1968).
- [22] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's relativity*, Oxford University Press (1992).
- [23] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité*, Ed. Mir Moscou (1960).
- [24] M. W.Lai, D. Rubin et E. Krempl, *Introduction to continuum Mechanics*, Butterworth (1993).
- [25] S. R. de Groot, P. Mazur, *Non-equilibrium Thermodynamics*, North-Holland (1969).
- [26] D. Schwarzenbach, *Cristallographie*, Presses Polytechniques Universitaires Romandes (1996).

- [27] J. Coirier, *Mécanique des milieux continus*, Dunod (2001).
- [28] P. Manneville, *Structures dissipatives, chaos et turbulence*, Aléa-Saclay (1991)
- [29] U. Frisch, *The legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press (1995).
- [30] L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Ed. Mir Moscou (1960).
- [31] P.-A. Bois, *Introduction à la mécanique théorique des fluides*, Ellipses (2000).
- [32] S. Török, *Analytical Mechanics*, John Wiley & Sons (2000).
- [33] J. Rappaz et M. Picasso, *Introduction à l'analyse numérique*, Presses Polytechniques Universitaires Romandes (2000).
- [34] S. D. Chatterji, *Analyse vectorielle*, Presses Polytechniques Universitaires Romandes (1997).

# Index

- action, 9
- algèbre
  - de Lie, 186
- allongement spécifique, 127
- angle de cisaillement, 129
- angle-action
  - action, 80
  - angle, 81
- anisotropie, 131
- atome
  - Bohr, 83
- autonôme, 5
- boost, 102
- champ
  - contravariant, 187
  - covariant, 187
  - incompressible, 139
  - irrotationnel, 139
  - longitudinal, 139
  - transverse, 139
- changement de coordonnées, 26
- chaos
  - déterministe, 68
- circulation, 158
- cisaillement, 128, 130
- classe cristalline, 132
- coefficient
  - de Lamé, 132
  - de viscosité cinématique, 121
  - de viscosité de cisaillement, 137
  - de viscosité dynamique, 135, 137
  - de viscosité volumique, 137
- composante
  - longitudinale, 139
  - transverse, 140
- compression uniforme, 130
- condition
  - de séparabilité de Staeckel, 74
- conditions aux bord
  - Neumann, 166
- constante
  - de Planck, 83
  - du mouvement, 29, 33, 39, 40
- constantes
  - de structure, 186
- contraction
  - de Fitzgerald-Lorentz, 108
  - des longueurs, 107
- contrainte
  - autonôme, 5
  - bilatérale, 4
  - différentielle, 2
  - différentielle intégrable, 2
  - holonôme, 2
  - non holonôme, 3
  - semi-holonôme, 4
  - unilatérale, 4
- contrainte rhéonôme, 2
- contrainte scléronôme, 2
- contravariance, 187
- coordonnée
  - séparable, 73
- coordonnées généralisées, 1
  - indépendantes, 5
- couche
  - limite, 165
- courbe de traction, 120
- covariance, 187
  - de la physique, 98
- crochets
  - de Lagrange, 58
  - de Poisson, 39
- cône de lumière, 99
- degré de liberté, 1, 5
- densité
  - lagrangienne, 118
- diagramme
  - de Minkowski, 99
- difféomorphisme, 26
- différences centrées, 192
- différentielle totale, 173
- dilatation
  - du temps, 107

- distance, 99
- débitmètre de Venturi, 154
- déplacement
  - réel, 11
  - virtuel compatible, 11
- dérivée
  - matérielle, 145
  - numérique, 192
  - substantielle, 145
- écoulement
  - de Poiseuille, 162
  - irrotationnel, 164
  - permanent, 151
  - potentiel, 164
  - similaire, 156
  - stationnaire, 151
- élasticité, 119
- énergie
  - cinétique, 17
  - interne, 184
  - libre, 184
- équation
  - d'onde, 117, 139
  - de Bernoulli, 154
  - de bilan, 147
  - de Boltzmann, 121
  - de continuité, 147
  - de Euler, 153, 176
  - de Laplace, 166, 195
  - de Navier-Stokes, 151
    - adimensionnelle, 156
  - de Poisson, 194
  - de Schrödinger, 78
- équations
  - canoniques de Hamilton, 38
  - de BBGKY, 121
  - de d'Alembert, 15
  - de Euler, 10
  - de Euler-Lagrange, 10
  - de Hamilton-Jacobi, 70
  - de Hamilton-Jacobi réduite, 71
  - de Hamilton-Jacobi séparable, 74
  - de Lagrange, 10, 18
    - de première espèce, 17
    - de seconde espèce, 24
  - de Maxwell, 105
- espace
  - de configuration, 37
  - de Minkowski, 98
  - des phases, 37, 43
  - homogène, 34
  - isotrope, 35
- événement, 99
- extensivité, 145
- facteur intégrant, 174
- famille cristalline, 132
- flot hamiltonien, 43
- fluide
  - newtonien, 143
  - parfait, 135, 151
- fonction
  - de dissipation de Rayleigh, 21
  - génératrice, 61
  - génératrice de première espèce, 62
  - génératrice de quatrième espèce, 64
  - génératrice de seconde espèce, 63
  - génératrice de troisième espèce, 64
  - homogène de degré  $p$ , 181
  - homogène de degré 2, 31
  - principale de Hamilton, 70
- force
  - conservative, 17
  - de liaison, 14, 24
  - de Lorentz, 19
  - généralisée, 15
  - non conservative, 17
- force interne, 122
- forme différentielle
  - exacte, 174
  - inexacte, 174
- forme quadratique
  - homogène, 32
- formule
  - de Stokes, 22
- groupe
  - de Lorentz, 101
  - de Lorentz restreint, 102
  - de Poincaré, 101
  - de symétrie continu à 1 paramètre, 33
  - euclidien, 97
  - symplectique, 54
- générateur
  - infinitésimal, 34
- hamiltonien, 38
- homogénéité
  - de l'espace, 34
  - du temps, 30
- identité
  - de Jacobi, 186
- impulsion généralisée, 19



- intégrabilité, 68
- intégrale
  - première, 29, 33
- invariance
  - de jauge, 29
  - rotations, 35
  - translations spatiales, 34
- invariant, 187
- involution, 68, 183
- isotropie
  - de l'espace, 35
- jacobien, 48
- jauge
  - de Lorentz, 105
- lagrangien, 9, 18
- liaison
  - parfaite, 14
- ligne
  - de courant, 153
  - de flot, 43
  - tourbillon, 159
- loi
  - de Hooke, 117, 135
- masse
  - effective, 110
- matrice
  - de Pauli, 186
  - hessienne, 183
  - jacobienne, 54
  - symplectique, 54
- module
  - d'élasticité, 117
  - de cisaillement, 132
  - de Poisson, 135
  - de Young, 117, 135
- moment conjugué, 19
- multiplicateur de Lagrange, 23, 178, 179
- mécanique analytique, 1
- métrique
  - euclidienne, 97
- nombre
  - de Reynolds, 156
  - quantique principal, 83
- onde
  - de gravitation, 167
  - progressive, 140
  - rétardée, 140
- orbite, 79
  - périodique fermée, 79
  - périodique ouverte, 79
- paquet d'ondes, 78
- plasticité, 119
- point de Lagrange
  - cinquième, 90
  - premier, 91
  - quatrième, 90
  - second, 91
  - troisième, 91
- potentiel
  - généralisé, 18
- principe
  - d'équivalence de Newton, 98
  - de d'Alembert, 15
  - de Hamilton, 9
  - de Hamilton covariant, 189
  - de Hamilton modifié, 184
  - de moindre action, 10
  - des travaux virtuels, 14
- processus irréversibles, 120
- pseudo-tenseur, 188
- quadrivecteur, 104
  - accélération, 106
  - courant, 105
  - force, 109
  - impulsion, 109
  - position, 106
  - potentiel, 105
  - vitesse, 106
  - énergie-impulsion, 109
- rapidité, 102
- renversement du temps, 42
- rhéologie, 119
- référentiel
  - inertiel, 98
  - tangent, 105
- réseau de Bravais, 132
- section
  - de Poincaré, 85
- solution
  - complète, 70
- symbole
  - d'antisymétrie, 125
  - Levi-Civita, 125, 187
- symplectique, 54
- symétrie
  - du système, 33
- système

- conservatif, 18
- cristallin, 132
- de Bravais, 132
- temps
  - de récurrence de Poincaré, 48
  - propre, 105
- tenseur, 188
  - de type densité, 188
  - des champs électromagnétiques, 105
  - des coefficients de viscosité, 137
  - des contraintes, 122
  - des déformations, 127
  - des modules élastiques, 131
  - des tensions, 122
  - des vitesses de déformation, 136
  - métrique, 188
  - pseudochrone, 188
- thermodynamique, 184
- théorème
  - de Helmholtz, 193
  - de Kelvin, 159
  - de Liouville, 43
  - de Liouville-Arnold, 84
  - de Noether, 33
  - de Poincaré, 48
  - de Thompson, 159
- tourbillon
  - libre, 161
  - ligne, 159
  - tube, 159
  - vecteur, 158
- trajectoire
  - réelle, 10
  - virtuelle, 9
- transformation
  - canonique, 53
  - de Galilée, 60, 97
  - de jauge, 28, 60, 105
  - de Legendre, 183
  - de Lorentz, 101
- variable
  - cyclique, 29
- vecteur
  - de vorticité, 136
  - tourbillon, 136, 158
- viscosité, 119
  - cinématique, 151
- vitesse
  - de groupe, 169
  - de phase, 169
  - généralisée, 16

# Table des figures

1.1	Pendule simple définissant une contrainte holonôme scléronôme. . . . .	3
1.2	Ressort excité définissant une contrainte holonôme rhéonôme. . . . .	3
1.3	Contrainte unilatérale. . . . .	4
1.4	Roulement sans glissement en dimension 1. . . . .	6
1.5	Roulement sans glissement en dimension 2. . . . .	7
2.1	Trajectoires réelle et virtuelles. . . . .	10
2.2	Déplacements virtuels : point sur la droite. . . . .	12
2.3	Déplacements virtuels : point sur un cercle. . . . .	12
2.4	Déplacements virtuels : point dans le plan. . . . .	13
2.5	Déplacements virtuels : centrifugeuse. . . . .	13
2.6	Pendule harmonique. . . . .	20
2.7	Problème de Stokes. . . . .	22
2.8	Pendule simple et force de liaison. . . . .	25
2.9	Coordonnées sphériques. . . . .	30
3.1	Ligne de flot dans l'espace des phases. . . . .	44
3.2	Evolution du volume dans l'espace des phases. . . . .	44
3.3	Bilan de densité de probabilité pour un degré de liberté. . . . .	45
3.4	Le théorème de récurrence de Poincaré. . . . .	49
3.5	Particule dans un potentiel confinant. . . . .	49
3.6	Preuve du théorème de Poincaré : décomposition en ensembles disjoints. . . . .	50
3.7	Preuve du théorème de Poincaré : résultat final. . . . .	51
3.8	Théorème de Poincaré pour un gaz. . . . .	52
3.9	Théorème de Poincaré pour une chaîne d'oscillateurs harmoniques. . . . .	52
3.10	Orbites périodiques fermée (gauche) et ouverte (droite). . . . .	80
3.11	Orbites dans l'espace des phases du pendule. . . . .	80
3.12	Théorème de Liouville-Arnold et tore déformé. . . . .	84
3.13	Théorème de Liouville-Arnold et tore non déformé. . . . .	85
3.14	Problème à trois corps : coordonnées. . . . .	86
3.15	Problème à trois corps restreint : coordonnées. . . . .	88
3.16	Problème à trois corps restreint : racines et points d'équilibre. . . . .	91
3.17	Problème à trois corps restreint : les cinq points de Lagrange. . . . .	92
3.18	Problème à trois corps restreint : troyens de Jupiter. . . . .	95
4.1	Diagramme de Minkowski. . . . .	100
4.2	Boost dans la direction $\widehat{\mathbf{e}}_1$ . . . . .	102
4.3	Temps propre et référentiel tangent $\mathcal{R}'$ . . . . .	106
4.4	Force et accélération relativistes. . . . .	110
5.1	Modèle de chaîne élastique. . . . .	116

5.2	Courbe de traction. . . . .	120
5.3	Déformation d'un barreau parallélépipédique. . . . .	121
5.4	Forces internes. . . . .	122
5.5	Décomposition par les contraintes de la force de surface. . . . .	123
5.6	Condition d'équilibre des forces. . . . .	124
5.7	Décomposition du mouvement. . . . .	126
5.8	Allongement spécifique unidimensionnel. . . . .	128
5.9	Déformation de cisaillement dans les deux directions $\widehat{\mathbf{e}}_2$ et $\widehat{\mathbf{e}}_3$ . . . . .	128
5.10	Courbes de traction et différents comportements. . . . .	131
5.11	Les quatorze réseaux de Bravais. . . . .	133
5.12	Traction sur un barreau. . . . .	134
5.13	Ecoulement visqueux entre deux plaques. . . . .	136
6.1	Equation de bilan. . . . .	146
6.2	Dérivation de l'équation de Navier-Stokes. . . . .	152
6.3	Ligne de courant $\Gamma$ . . . . .	154
6.4	Débitmètre de Venturi. . . . .	155
6.5	Ecoulement autour d'un obstacle pour $\mathcal{R}_e = 26$ . . . . .	157
6.6	Ecoulement autour d'un obstacle pour $\mathcal{R}_e = 200$ . . . . .	157
6.7	Ecoulement autour d'un obstacle pour $\mathcal{R}_e = 2'000$ . . . . .	158
6.8	Cylindre en rotation entraînant le fluide. . . . .	159
6.9	Lignes et tube tourbillon. . . . .	160
6.10	Contour continu fermé. . . . .	160
6.11	Ecoulement de Poiseuille. . . . .	162
6.12	Solution de Poiseuille. . . . .	163
6.13	Ecoulement potentiel. . . . .	164
6.14	Couche limite et sillage. . . . .	165
6.15	Problèmes extérieur et intérieur. . . . .	165
6.16	Turbulence due à la couche limite. . . . .	166
6.17	Décollement de la couche limite. . . . .	166
6.18	Ondes de gravitation. . . . .	167
6.19	Solution des ondes de gravitation. . . . .	170
A.1	Extremas relatifs et absolus. . . . .	175
A.2	Trajectoire extrême et sa déviation. . . . .	176
A.3	Distance la plus courte entre deux points. . . . .	177
A.4	Transformation de Legendre en dimension une. . . . .	181
A.5	Transformation d'une droite. . . . .	182
A.6	Coordonnées cylindriques et sphériques. . . . .	197